Éléments de correction - CC 1 du 7 novembre 2024

Exercice 1 (2 points)
On peut vérifier que $(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$. Donc

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 1$$

et $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ n'est pas irrationnel.

Exercice 2 (2 points)

$$\frac{|x-2|}{x-4} = \frac{|x+2|}{x+4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{|x-2|}{x-4} = \frac{|x+2|}{x+4} \\ x < -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \frac{|x-2|}{x-4} = \frac{|x+2|}{x+4} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \frac{|x-2|}{x-4} = \frac{|x+2|}{x+4} \\ x > 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{-x+2}{x-4} = \frac{-x-2}{x+4} \\ x < -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \frac{-x+2}{x-4} = \frac{x+2}{x+4} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+2}{x+4} \\ x > 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2-x)(x+4) = (x+2)(4-x) \\ x < -2, x \neq -4 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} (-x+2)(x+4) = (x+2)(x-4) \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$$

$$\text{ou } \left\{\begin{array}{l} (x-2)(x+4) = (x+2)(x-4) \\ x > 2, x \neq 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x^2 - 2x + 8 = -x^2 + 2x + 8 \\ x < -2, x \neq -4 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} -x^2 - 2x + 8 = x^2 - 2x - 8 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$$

$$\text{ou } \left\{\begin{array}{l} x^2 + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8 \\ x > 2, x \neq 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x < -2, x \neq -4 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 16 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x > 2, x \neq 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$$

On constate que $\sqrt{8} > 2$ (car $2^2 < 8$) donc le système n'a pas de solution.
En conclusion, aucun x réels ne vérifie $\frac{|x-2|}{x-4} = \frac{|x+2|}{x+4}$.

Exercice 3 (2 points)

$$x^2 + 3 \leq 5x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

Les x réels qui vérifient $x^2 + 3 \leq 5x - 1$ sont exactement les points de l'intervalle $[1, 4]$.

Exercice 4 (2 points)

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\cos\left(\frac{17\pi}{8}\right)\right) &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{17\pi}{8}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(\sin\left(2\pi - \frac{13\pi}{8}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercice 5 (2 points)

On reconnaît dans $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$. Donc, pour tout n entier positif, $u_n = \dfrac{1}{3^n}$.

$$S = \sum_{n=0}^{2024} u_n = \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{2025}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2025}}\right).$$

Remarquons que $3^3 > 10$ donc $\frac{1}{3^{2025}} < \frac{1}{10^{675}}$. Donc

$$\frac{3}{2} - 10^{-5} < S < \frac{3}{2}$$

Exercice 6 (2 points)
On remarque que $2^{11} = 2048 < 3^7 = 2187$. Donc

$$2^{121} = (2^{11})^{11} = (2048)^{11} < (2187)^{11} = (3^7)^{11} = 3^{77}.$$

Donc $2^{121} < 3^{77}$.

Exercice 7 (2 points)
On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $r^2 - 6r - 7 = 0$ qui admet deux racines réelles $r_1 = 7$ et $r_2 = -1$. Il existe deux constantes réelles a et b telles que $u_n = ar_1^n + br_2^n$. Comme $u_0 = 2$, on trouve $a + b = 2$. Comme $u_1 = 1$, on trouve $7a - b = 1$, donc (en sommant) $8a = 3$ et en reportant

$$a = \frac{3}{8}, \qquad b = \frac{13}{8}.$$

En conclusion partielle, pour tout n entier,

$$u_n = \frac{3}{8} \cdot 7^n + \frac{13}{8} \cdot (-1)^n$$

Montrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n entier. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Si jamais $u_n > 0$ pour $n \leq N$ avec $N \geq 2$, alors $u_{N+1} = 6u_N + 7u_{N-1} > 0$ donc on vient de voir que $u_n > 0$ pour tout $n \leq N+1$. Donc u_n ne s'annule pas et le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est bien défini pour tout n entier positif.
Pour étudier sa limite, on écrit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ar_1^{n+1} + br_2^{n+1}}{ar_1^n + br_2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ar_1^{n+1}\left(1 + \frac{br_2^{n+1}}{ar_1^{n+1}}\right)}{ar_1^n\left(1 + \frac{br_2^n}{ar_1^n}\right)} = r_1 = 7$$

(Ceci est l'exercice 7 du CC1 de novembre 2023.)

Exercice 8 (2 points)
Remarquons que l'équation proposée n'a de sens que pour $x > 0$. Définissons la fonction

$$\begin{array}{rlcl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^4} - \ln(x) \end{array}$$

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ (en tant que somme de fonctions continues), on constate que $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $f(e^5) = \frac{1}{1+e^{10}} - 5 < 1 - 5 = -4 < 0$ donc, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un nombre c dans $[1, e^5]$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{1+c^4} = \ln(c)$.
En conclusion, l'équation $\dfrac{1}{1+x^4} = \ln(x)$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 9 (2 points)
Notons $s = \sin(\mathrm{Arctan}(3))$ et $c = \cos(\mathrm{Arctan}(3))$. On remarque que

$$\frac{s}{c} = \frac{\sin(\mathrm{Arctan}(3))}{\cos(\mathrm{Arctan}(3))} = \tan(\mathrm{Arctan}(3)) = 3.$$

Comme $\frac{s}{c} = 3$, on peut écrire $s = 3c$. D'autre part, $s^2 + c^2 = 1$. On s'intéresse maintenant au système

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \\ s = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10c^2 = 1 \\ s = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = \frac{1}{10} \\ s = 3c \end{cases}$$

La fonction arctangente est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $c > 0$. On en déduit $c = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et finalement

$$\sin(\mathrm{Arctan}(3)) = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

Exercice 10 (2 points)

$$\sin(x) - \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} | x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbf{Z} | x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbf{Z} | x = \pi + 2k\pi.$$

Les x réels qui vérifient $\sin(x) - \cos(x) = 1$ sont donc exactement les points de $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right\}$.

(Il s'agit de l'exercice 10 du CC 1 de novembre 2023.)

Exercice 11 (4 points)
Définissons la fonction f

$$f: \begin{array}{lcll} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} & \\ x & \mapsto & x & \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{array}$$

La fonction f est dérivable (au moins) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, avec une dérivée constante égale à 1, donc strictement positive. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$: soient x_1 et x_2 dans $\mathbf{R}$ tels que $x_1 < x_2$, on veut montrer que $f(x_1) < f(x_2)$. Si x_1 et x_2 sont tous les deux strictement négatifs ou tous les deux strictement positifs, c'est vrai. Si $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$, alors $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) \geq 1$ donc $f(x_1) < f(x_2)$. Le dernier cas est $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$. Dans ce cas, $f(x_1) = 1 < x_2 + 1 = f(x_2)$. On vient de montrer que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
La limite à gauche de f en 0 est 0, la limite à droite est 1. Donc f n'est pas continue en 0.
En conclusion, il existe des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ croissantes qui ne sont pas continues en 0.

Exercice 12 (4 points)
On peut commencer par étudier la fonction f. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ (c'est une fonction polynôme) et pour tout x réel, $f'(x) = 2x - 1$, donc $f'(x) < 0$ pour $x < \frac{1}{2}$, $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$, et $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$. En particulier, f admet un minimum global en $\frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline & +\infty & & & & +\infty \\ f & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & \frac{11}{4} & & \end{array}$$

Répondons maintenant aux questions posées, en commençant par la première : que vaut $f(f^{-1}([0,5]))$?

$$x \in f^{-1}([0,5]) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

On peut calculer le discriminant puis les racines de $x^2 - x - 2$: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, racines $r_1 = \frac{1+3}{2}$=2 et $r_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. D'après le cours (signe du trinôme),

$$x^2 - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2] .$$

Donc

$$f(f^{-1}([0,5])) = f([-1,2]) .$$

Comme f est continue, l'image d'un intervalle est un intervalle. On peut écrire

$$f(f^{-1}([0,5])) = f\left(-1,2\right) = f\left(\left[-1,\frac{1}{2}\right]\right) \bigcup f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right).$$

et d'après le tableau de variation, f est monotone sur chacun des deux intervalles, donc

$$f(f^{-1}([0,5])) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-1\right)\right] \bigcup \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(2\right)\right] = \left[\frac{11}{4}, 5\right].$$

Pour la deuxième question (que vaut $f^{-1}(f([0,5]))$?), on procède de la même façon. Comme f est continue, l'image de $[0,5]$ est un intervalle (par application du théorème des valeurs intermédiaires). On décompose en suffisamment de morceaux de façon à ce que f soit monotone sur chaque morceau, donc ici $[0,\frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2},5]$

$$f([0,5]) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right] \cup \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(5)\right] = \left[\frac{11}{4}, 23\right].$$

Ensuite, il n'y a plus qu'à chercher une image inverse :

$$x \in f^{-1}(\left[\frac{11}{4}, 23\right]) \Leftrightarrow \frac{11}{4} \leq x^2 - x + 3 \leq 23 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 5$$

En conclusion, $f^{-1}(f([0,5])) = [-4,5]$.

Exercice 13 (4 points)
Sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, f est le produit de la fonction polynôme (donc dérivable) $x \mapsto x^3$ et de la composée de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui est dérivable (fraction rationnelle en dehors des pôles) et de sinus (qui est dérivable partout, donc en particulier sur l'image de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ par $x \mapsto \frac{1}{x^2}$). Donc f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
La situation est moins claire en zéro. On va revenir à la définition et examiner l'existence d'une limite pour les taux d'accroissements.

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

(produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée). Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe (donc f est dérivable en 0) et cette limite vaut 0, donc $f'(0) = 0$.
On a déjà dit que la dérivée de x existe en dehors de 0 et on peut calculer, pour tout x non nul,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{-2}{x^3} = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$. On voit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et, pour tout n de $\mathbf{N}$,

$$f'(x_n) = -2$$

donc $f'(x_n)$ tend vers -2 $\neq f'(0)$ quand n tend vers l'infini. Donc f' n'est pas continue en 0.

Exercice 14 (4 points)

Soit $a \geq 0$ fixé. On définit la fonction

$$\begin{array}{rlcl} f: & [0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & b & \mapsto & \operatorname{Arctan}(b) - \operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b-a}{1+ab}\right) \end{array}$$

La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ (elle est aussi dérivable à droite en zéro mais nous n'en aurons pas besoin). Pour $b > 0$, on peut calculer

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{b-a}{1+ab}\right)^2} \frac{1+ab-a(b-a)}{(1+ab)^2} \\ &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1+a^2}{(1+ab)^2+(b-a)^2} \\ &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1+a^2}{1+2ab+a^2b^2+b^2-2ab+a^2} \\ &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1+a^2}{1+a^2b^2+b^2+a^2} \\ &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1+a^2}{1+b^2+a^2(1+b^2)} \\ &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1+a^2}{(1+b^2)(1+a^2)} \\ &= \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+b^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est constante sur $]0,+\infty[$ et par continuité en 0 f est constante sur $[0,\infty[$. Pour estimer la valeur de cette constante, il suffit de calculer f en un point bien choisi, par exemple $b = 0$:

$$f(0) = \operatorname{Arctan}(0) - \operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{0-a}{1+a\cdot 0}\right) = -\operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}(-a) = 0$$

Donc f est la fonction nulle sur $[0,+\infty[$, donc pour tout $b \geq 0$,

$$\operatorname{Arctan}(b) - \operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) = 0$$

ce qui exactement ce qu'on voulait prouver.
Remarquons que pour tout k entier positif, la formule ci-dessus avec $b = k+1$ et $a = k$ s'écrit

$$\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Par un récurrence immédiate, pour tout $n \geq 1$ entier,

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(n)$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 15 (6 points)
On peut rappeler que d'après le cours $\lim_{u\to 0^+} u\ln(u) = 0$ et que $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ donc (par multiplication des équivalents), $\lim_{u\to 0^+} \sin(u)\ln(u) = 0$. Donc $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp(x\ln(\sin(x)) = 1$, et le numérateur tend vers 0. Pour le dénominateur, on doit traiter le terme $(\tan(x))^x = e^{x\ln(tan(x))}$ qui fait apparaître la forme indéterminée $e^{0\cdot\infty}$. On va essayer de trouver un équivalent de $x\ln(\tan(x))$ en 0^+.

$$\ln(\tan(x)) - \ln(x) = \ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x\cos(x)}\right) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

Les deux termes de cette dernière somme tendent vers 0, donc $\ln(\tan(x)) - \ln(x)$ tend vers 0 en 0^+. On peut le réécrire

$$\frac{\ln(\tan(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(\tan(x)) - \ln(x)}{\ln(x)} + \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1 + o_0(1)$$

ce qui montre que $\ln(\tan(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$ et que le dénominateur tend aussi vers 0.

La limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^x - 1}$ est une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On peut essayer d'utiliser la règle de l'Hôpital. Ça va marcher mais il faut dériver des puissances et les expressions sont relativement pénibles.
Ici, il est plus simple de se souvenir que $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, donc, après avoir bien vérifié que $\sin(x)\ln(x)$ tendait vers 0 en 0, :

$$x^{\sin(x)} - 1 = \exp(\sin(x)\ln(x)) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \sin(x)\ln(x)$$

et de la même façon (en ayant une fois de plus vérifié que $x\ln\tan(x)$ tendait vers 0 en 0) :

$$(\tan(x)^x - 1 = \exp(x\ln(\tan(x))) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln(x)$$

En remplaçant dans l'expression initiale par les équivalents correspondants :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)\ln(x)}{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Exercice 16 (6 points) La réponse est non. Par exemple, définissons f_1 et f_2 par

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 1+|x| \end{array}$$

On vérifie immédiatement que pour $\lim_{x\to 0} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$ donc $f_1(u) \underset{u\to 0}{\sim} f_2(u)$. Mais $\ln(f_1)$ est la fonction nulle, qui n'est pas équivalente à $\ln(f_2)$ qui prend des valeurs strictement positives pour $x \neq 0$.

Exercice 17 (6 points)
La réponse est non. Par exemple, définissons f_1 et f_2 par

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 1+x \end{array}$$

Définissons aussi $g = -f_1$. On vérifie immédiatement que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

donc $f_1 \underset{0}{\sim} f_2$.
D'autre part, pour tout x réel, $f_1(x) + g(x) = 0$, alors que $f_2(x) + g(x) = x$. En particulier, $f_1 + g$ et $f_2 + g$ ne sont pas équivalentes en 0.

Exercice 18 (6 points)
Comme la fonction $x \mapsto \cos(x) - \exp(x^2)$ est paire, un n qui conviendrait serait aussi pair.
Comme

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) - \exp(x^2) = 0,$$

$n = 0$ ne convient pas.
On calcule ensuite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \exp(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - 2x\exp(x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} - \exp(x^2) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Donc $n = 2$ et $\alpha = -\frac{3}{2}$ conviennent et $\cos(x) - \exp(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{3}{2}x^2$.

Exercice 19 (6 points)
Suivons l'indication de l'énoncé et définissons, pour tout n entier, $v_n = u_n - \lambda$. (Le nombre λ est fixé mais on précisera sa valeur plus tard.) Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = 3u_n - 1 - \lambda = 3\left(u_n - \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}\right).$$

En d'autres termes, si on choisit λ tel que $\dfrac{1}{3} + \dfrac{\lambda}{3} = \lambda$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sera géométrique.

$$\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{3} = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Avec le choix $\lambda = \frac{1}{2}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Donc pour tout n entier, $v_n = \frac{1}{2}3^n$ et finalement, pour tout n entier,

$$u_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Exercice 20 (8 points)

1. Il n'y a aucune difficulté, c'est un quotient de fonctions continues le dénominateur ne s'annulant pas : $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\pi+x)}{\arctan(1+x)} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{4}} = 0$.
2. Il s'agit d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ », on va appliquer la règle de l'Hôpital.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos(2x)}{\sin(x) - x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + 2\sin(2x)}{\cos(x) - 2x} = 1.$$
3. Il s'agit d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ », on va utiliser les équivalents $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et $\tan(u) \underset{0}{\sim} u$. On se souvient qu'on ne peut pas sommer les équivalents (voir l'exercice 17), mais on peut sommer les limites. On va
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x^3) - \sin(x^5)}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x^3)}{\sin(x^3)} - \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^5)}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^3} - \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5}{x^3} = 1 - 0 = 1$$
4. Il s'agit d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Au choix, on peut factoriser et se ramener à des formes $\sqrt{1+u} - \sqrt{u}$ en 0, ou utiliser l'expression conjuguée. Utilisons ici l'expression conjuguée.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0
\end{aligned}$$
5. Il s'agit d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Comme pour la question 4, on peut factoriser et se ramener à des formes $\sqrt{1+u} - \sqrt{u}$ en 0, ou utiliser l'expression conjuguée. Ici, nous allons factoriser dans un but didactique (c'est plus court en utilisant l'expression conjuguée comme dans la question 4). Pour $x > 1$,
$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} &= \sqrt{x^2-x}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x}} - 1\right) \\
&= x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-x}} - 1\right) \\
&= \sqrt{x^2-x}\left(\sqrt{\frac{x^2-x+2x}{x^2-x}} - 1\right) \\
&= \sqrt{x^2-x}\left(\sqrt{1+\frac{2x}{x^2-x}} - 1\right)
\end{aligned}$$
On remarque que $\sqrt{x^2-x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\sim} x$. On va utiliser l'équivalent $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u}{2}$ avec $u = \dfrac{2x}{x^2-x}$, et on obtient
$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

En conclusion, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 1$.

6. Il s'agit d'une forme indéterminée « 1^∞ ». On va passer à la forme exponentielle.

$$(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))\right)$$

Comme $\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(1+\sin(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}x = 1,$$

et finalement, par continuité de l'exponentielle en 1, $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

7. Il s'agit d'une forme indéterminée $\infty-\infty$. La méthode usuelle (se ramener à un quotient $\frac{0}{0}$ et utiliser la règle de l'Hôpital) fonctionne très bien, mais dans ce cas précis on peut aussi faire un peu de trigonométrie.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\tan^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = 1.$$

8. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}$ Il s'agit encore d'une forme indéterminée $\infty-\infty$. On peut encore (comme en question 7) faire un peu de trigonométrie (écrire $1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$). Pour changer, on va utiliser la méthode du cours et se ramener à un quotient $\frac{0}{0}$ puis utiliser la règle de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0.$$

Exercice 21 (10 points) Commençons par montrer le résultat, très utile et souvent utilisé dans les exercices :

Proposition 1 (Encadrement du logarithme) *Pour tout réel $x \geq 0$,*

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \tag{1}$$

L'inégalité de droite est un résultat du cours mais on va quand même le redémontrer. Définissons les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{x^2}{2} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Les trois fonctions f, g et h sont continues sur $[0,+\infty[$, dérivables sur $]0,+\infty[$, de dérivées, pour $x > 0$:

$$f'(x) = 1-x \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} \quad h'(x) = 1$$

Clairement, pour tout $x > 0$, $g'(x) < h'(x)$. D'autre part,

$$f'(x) = 1 - x = \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{1-x^2}{1+x} < \frac{1}{1+x} = g'(x)$$

Comme $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, on déduit (1) par croissance comparée.
Revenons à l'exercice 21. Il s'agit de comparer $\sqrt[2024]{2024}$ ou $\frac{101}{100}$, ou de manière équivalente 2024 et $\left(\frac{101}{100}\right)^{2024}$ (par croissance de la fonction $u \mapsto u^{2024}$ sur $[0, +\infty[$) ou encore $\ln(2024)$ et $2024 \ln\left(\frac{101}{100}\right)$ (par croissance de la fonction logarithme).
La résolution de l'exercice passe par l'estimation de ces deux quantités. En utilisant (1) avec $x = \frac{1}{100}$,

$$20 < 2024 \cdot \left(\frac{99}{10000}\right) \leq 2024 \ln\left(\frac{101}{100}\right) \leq 2024 \cdot \frac{1}{100} < 20 + \frac{1}{4}$$

Pour estimer $\ln(2024)$, on passe par l'encadrement de e donné en introduction : $e > \frac{27}{10}$, donc $e^2 > \frac{729}{100} > 7$ donc $e^4 > 49$, $e^8 > 2401 > 2024$. En particulier, $\ln(2024) < \ln(e^8) = 8$. On en déduit que $\ln(2024) < 2024 \ln\left(\frac{101}{100}\right)$ et donc

$$\sqrt[2024]{2024} < \frac{101}{100}.$$

Exercice 22 (10 points) Il s'agit de comparer π^{2024} ou 3^{2025} et comme pour l'exercice 21, on va comparer leurs logarithme $2024 \ln(\pi)$ et $2025 \ln(3)$. Comme

$$2024 \ln(\pi) - 2025 \ln(3) = 2024 \ln(\pi) - 2024 \ln(3) - \ln(3) = 2024 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln(3),$$

on va évaluer $\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\ln(3)$.
On sait (énoncé) que $\frac{157}{50} < \pi < \frac{63}{20}$, donc $\frac{157}{150} < \frac{\pi}{3} < \frac{21}{20}$ et d'après la formule (1) (voir exercice 21)

$$\frac{7}{150} - \frac{49}{45000} < \ln\left(\frac{157}{150}\right) < \ln\left(\frac{\pi}{3}\right) < \ln\left(\frac{21}{20}\right) < \frac{1}{20}$$

En particulier,

$$\frac{1}{30} < \ln\left(\frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{20}$$

donc

$$67 < 2024 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right) < 102$$

Comme $e > 2$ (énoncé), $3 < e^2$ donc $\ln(3) < 2$, donc $2024 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln(3) > 67 - 2 > 0$ et finalement

$$\pi^{2024} > 3^{2025}.$$