

ANALYSE 1

L'épreuve est notée sur 20, le sujet comporte 22 exercices. Le candidat choisira un ou plusieurs exercices pour un total inférieur ou égal à 20 points. **Toutes les réponses doivent être justifiées.** On note $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels ; dans les exercices 21 et 22, on pourra utiliser sans justification $\frac{157}{50} < \pi < \frac{63}{20}$ et $\frac{271}{100} < e < \frac{68}{25}$.

Rappel : pour n entier et $x > 0$, la racine n^{ime} de x est $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 1 (2 points)

Est-ce que $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ est irrationnel ? (On pourra calculer $(a + \sqrt{5})^2$ pour a bien choisi.)

Exercice 2 (2 points)

Quels sont les x réels qui vérifient $\frac{|x - 2|}{x - 4} = \frac{|x + 2|}{x + 4}$?

Exercice 3 (2 points)

Quels sont les x réels qui vérifient $x^2 + 3 \leq 5x - 1$?

Exercice 4 (2 points)

Simplifier $\arcsin\left(\cos\left(\frac{17\pi}{8}\right)\right)$.

Exercice 5 (2 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$. Que vaut $S = \sum_{n=0}^{2024} u_n$? Donner une valeur exacte et une valeur approchée de S à 10^{-5} près.

Exercice 6 (2 points)

Qui est le plus grand : 3^{77} ou 2^{121} ?

Exercice 7 (2 points)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier n , $u_{n+2} = 6u_{n+1} + 7u_n$. Est-ce que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est bien défini pour tout n entier positif ? Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet-il une limite quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 8 (2 points)

L'équation $\frac{1}{1+x^4} = \ln(x)$ admet-elle des solutions réelles ?

Exercice 9 (2 points)

Simplifier, si c'est possible, $\sin(\operatorname{Arctan}(3))$.

Exercice 10 (2 points)

Quels sont les x réels qui vérifient $\sin(x) - \cos(x) = 1$?

Exercice 11 (4 points) Existe-t-il des fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ croissantes qui ne seraient pas continues en 0 ?

Exercice 12 (4 points)

On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

Que vaut $f(f^{-1}([0, 5]))$? Que vaut $f^{-1}(f([0, 5]))$?

Exercice 13 (4 points) On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ x &\mapsto 0 \quad \text{si } x = 0 \end{aligned}$$

Où la fonction f est-elle dérivable ? La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 14 (6 points)

Montrer que pour tous a et b réels positifs, $\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a) = \text{Arctan}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right)$.

En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, et préciser sa limite.

Exercice 15 (6 points)

Calculer, si elle existe, la limite suivante $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^x - 1}$.

Exercice 16 (6 points) Soient deux fonctions $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[$ et $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[$ telles que $f_1 \sim_0 f_2$. Est-on sûr que $\ln(f_1) \sim_0 \ln(f_2)$?

Exercice 17 (6 points) Soient trois fonctions $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que $f_1 \sim_0 f_2$. Est-on sûr que $f_1 + g \sim_0 f_2 + g$?

Exercice 18 (6 points) Peut-on trouver n entier et α réel tels que $\cos(x) - \exp(x^2) \sim_0 \alpha x^n$?

Exercice 19 (6 points) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout n de $\mathbf{N}$. Donner une expression simple de u_n . (On pourra définir $v_n = u_n - \lambda$ avec λ bien choisi.)

Exercice 20 (8 points) Calculer, si elles existent, les limites

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi + x)}{\arctan(1 + x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos(2x)}{\sin(x) - x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(x^3) - \sin(x^5)}{\sin(x^3)}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\tan^2(x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}$

Exercice 21 (10 points) Qui est le plus grand, $\sqrt[2024]{2024}$ ou $\frac{101}{100}$?

Exercice 22 (10 points) Qui est le plus grand, π^{2024} ou 3^{2025} ?