Contrôle 2 - corrigé

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême. Le barême est donné à titre indicatif.
Tous documents interdits excepté une feuille A4 manuscrite recto. Calculatrices interdites.

Exercice 1. Quelques équivalents à connaitre (*5 points*).

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en faisant apparaitre un taux d'accroissement.
2. En déduire que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1-\cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$. On pourra utiliser l'identité suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ pour $a = b = \frac{x}{2}$.
4. En déduire l'équivalent $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. On pourra utiliser sans justification l'équivalent $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Solution de l'exercice 1.

1. Pour tout $x > -1$, on a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}$, or la fonction ln est dérivable en 1 et sa dérivée est la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$ d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
2. Par définition, si on a deux fonctions f et g telles que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ alors on écrit $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$, d'où, en prenant $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et $g : x \mapsto x$, la conclusion $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ d'après la question précédente.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'identité suggérée par l'énoncé s'écrit :
$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right),$$
ce qui se simplifie en :
$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$
Mais pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, et donc $\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$, ce qui pour $y = \frac{x}{2}$ permet de réécrire l'égalité centrée précédente ainsi :
$$\cos(x) = 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$
ce qui donne l'égalité voulue
$$1-\cos(x) = 1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$
4. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0$ et $\sin(y) \underset{y\to 0}{\sim} y$ d'où $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim_{x\to 0} \frac{x}{2}$, d'où par produit d'équivalents
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}.$$
Ainsi
$$1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} 2\cdot\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$
comme voulu.

Exercice 2. Équivalent et calcul de limite (*4 points*).

1. Calculer

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)}.$$

On pourra s'appuyer sur les équivalents donnés dans l'exercice précédent.

2. En déduire que l'expression $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

Solution de l'exercice 2.

1. En passant à la puissance 1/2 l'équivalent donné par la question 4 de l'exercice 1, on obtient

$$\sqrt{1-\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part on a $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ d'où par quotient d'équivalents :

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{|x|}{\sqrt{2}\cdot x}.$$

Or pour tout $x > 0$ on a $|x| = x$ donc $\frac{|x|}{x} = 1$, d'où

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Et pour tout $x < 0$ on a $|x| = -x$ donc $\frac{|x|}{x} = -1$, d'où

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0^-}{\sim} \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

2. D'après la question précédente, comme $\frac{-1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)},$$

et donc en particulier l'expression $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exercice 3. Équivalents et fonction puissance (*6 points*).

1. Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
   a) Rappeler la définition de a^b.
   b) Démontrer que pour tout $a' > 0$, $\frac{a'^b}{a^b} = \left(\frac{a'}{a}\right)^b$.
2. Soient $f_1 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ et $f_2 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.
   a) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2(x)$ alors $[f_1(x)]^b \underset{x\to+\infty}{\sim} [f_2(x)]^b$. On pourra s'appuyer sur les questions précédentes et revenir à la définition.
   b) Est-il toujours vrai que si $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2(x)$ alors $\exp(f_1(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(f_2(x))$?

Solution de l'exercice 3.

1. a) On a $a^b = e^{b\ln(a)}$.

b) Soit $a' > 0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{a'^b}{a^b} &= \frac{e^{b\ln(a')}}{e^{b\ln(a)}}\\ &= e^{b\ln(a')-b\ln(a)}\\ &= e^{b(\ln(a')-\ln(a))}\\ &= e^{b\ln(\frac{a'}{a})}\\ &= \left(\frac{a'}{a}\right)^b,\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

2. a) Supposons $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2(x)$, alors par définition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1,$$

or par la question précédente on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(f_1(x))^d}{(f_2(x))^d} = \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)^d,$$

d'où par continuité de la fonction $y \mapsto y^b$ en 1 que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(f_1(x))^d}{(f_2(x))^d} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)^d = 1^d = 1,$$

d'où par définition $(f_1(x))^d \underset{x\to+\infty}{\sim} (f_2(x))^d$.

b) On a vu que c'était faux en TD, un contre-exemple étant donné par $f_1 : x \mapsto x+1$ et $f_2 : x \mapsto x+2$ qui sont équivalentes en $+\infty$, tandis que $\frac{\exp(f_1(x))}{\exp(f_2(x))} = \exp(f_1(x)-f_2(x)) = \exp(-1)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(f_1(x))}{\exp(f_2(x))} = e^{-1} \neq 1$, donc $\exp\circ f_1$ et $\exp\circ f_2$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Exercice 4. Une intégrale (*3 points*).
Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx$. On pourra utiliser l'identité $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Solution de l'exercice 4. On a d'une part que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, et d'autre part que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ d'où $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$, d'où $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1+\cos(2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{2}(2\pi - 0 + 0 - 0)\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Exercice 5. Résolution d'équation (*2 points*).
Résoudre l'équation $\tan(x) = 1$, où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Solution de l'exercice 5. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$, et on a

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,$$

donc la seul solution de l'équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $\frac{\pi}{4}$. Or la fonction tan est π-périodique, et $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, donc l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x) = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ est $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice 6. Limite de tangente hyperbolique (*3 points*).
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x)$.

Solution de l'exercice 6. Par définition, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1+0 = 1$, et $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ d'où $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = 1 - 2 = -1$.
On pouvait aussi s'en sortir en divisant le numérateur et le dénominateur par e^x (en $+\infty$) ou par e^{-x} (en $-\infty$), mais l'approche ci-dessus a l'avantage de marcher pour les deux limites. Enfin, on peut aussi utiliser les équivalents de cosh *et* sinh *en $\pm\infty$, ce qui revient plus ou moins à la méthode que l'on vient d'évoquer.*