Contrôle 2

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême. Le barême est donné à titre indicatif.
Tous documents interdits excepté une feuille A4 manuscrite recto. Calculatrices interdites.

Exercice 1. Quelques équivalents à connaitre (*5 points*).

1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en faisant apparaitre un taux d'accroissement.
2. En déduire que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$. On pourra utiliser l'identité suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ pour $a = b = \frac{x}{2}$.
4. En déduire l'équivalent $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. On pourra utiliser sans justification l'équivalent $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Exercice 2. Équivalent et calcul de limite (*4 points*).

1. Calculer
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)} \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)}.$$
On pourra s'appuyer sur les équivalents donnés dans l'exercice précédent.
2. En déduire que l'expression $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1+x)}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

Exercice 3. Équivalents et fonction puissance (*6 points*).

1. Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
   a) Rappeler la définition de a^b.
   b) Démontrer que pour tout $a' > 0$, $\frac{a'^b}{a^b} = \left(\frac{a'}{a}\right)^b$.
2. Soient $f_1 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ et $f_2 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.
   a) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2(x)$ alors $[f_1(x)]^b \underset{x\to+\infty}{\sim} [f_2(x)]^b$. On pourra s'appuyer sur les questions précédentes et revenir à la définition.
   b) Est-il toujours vrai que si $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2(x)$ alors $\exp(f_1(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(f_2(x))$?

Exercice 4. Une intégrale (*3 points*).
Calculer $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx$. On pourra utiliser l'identité $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Exercice 5. Résolution d'équation (*2 points*).
Résoudre l'équation $\tan(x) = 1$, où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 6. Limite de tangente hyperbolique (*3 points*).
Calculer $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x)$.