

Complément au cours du 26 septembre

On donne ici une série de preuves importantes sur les suites et la convergence qu'on n'a pas eu le temps d'aborder en cours. Ces preuves sont hors-programme, mais permettront aux personnes intéressées de mieux comprendre comment manipuler la définition de suite convergente.

1. TOUTE SUITE CONVERGENTE EST BORNÉE

Théorème. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Démonstration. L'idée de la preuve est de dire que par convergence, les termes de rang grand sont proches de la limite, ce qui nous permet de les borner, et que les termes d'avant ne sont qu'en nombre fini, ce qui nous permet aussi de les borner.

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, on applique la définition de la convergence pour $\varepsilon = 1$, ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_n - \ell| \leq 1$$

En remarquant que $u_n = (u_n - \ell) + \ell$, on peut alors utiliser l'inégalité triangulaire pour obtenir que pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

Soit alors $M_1 = 1 + |\ell|$, posons¹ $M_2 = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|)$ (ce maximum existe car il n'y a qu'un nombre fini de termes), alors par définition on a que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$|u_n| \leq M_2$$

tandis que pour tout $n \geq N$ on a déjà vu que

$$|u_n| \leq M_1.$$

Posons alors $M = M_1 + M_2$, alors comme $M_1 \geq 0$ et $M_2 \geq 0$ on a à la fois $M_1 \leq M$ et $M_2 \leq M$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$, alors $n \geq N$ ou $n \leq N-1$, ce qui nous permet de faire une disjonction de cas afin de prouver $|u_n| \leq M$:

- Si $n \geq N$, on a $|u_n| \leq M_1 \leq M$.
- Si $n \leq N-1$, on a $|u_n| \leq M_2 \leq M$.

Dans tous les cas, on a obtenu l'égalité $|u_n| \leq M$, qui est donc prouvée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a exhibé $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée comme voulu. $\square$

2. SOMME DE LIMITES

Théorème. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$$

Démonstration. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes, notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Notre but est de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$. On commence par estimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distance entre $u_n + v_n$ et $\ell + \ell'$ afin de savoir où aller. Soit donc $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| &= |u_n + v_n - \ell - \ell'| \\ &= |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \\ &\leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|, \end{aligned}$$

1. On pourrait aussi poser $M_2 = \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|$, l'important étant que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, $|u_n| \leq M_2$.

2. Si on avait posé $M = \max(M_1, M_2)$, le raisonnement fonctionnerait tout aussi bien : le but est seulement d'exhiber M tel qu'on a à la fois $M \geq M_1$ et $M \geq M_2$.

la dernière inégalité découlant de l'inégalité triangulaire. Ainsi, on voit que si on fixe $\varepsilon > 0$ et si chacun des deux distances $|u_n - \ell|$ et $|v_n - \ell'|$ est plus petite que $\varepsilon/2$, on a que $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon$. Nous pouvons maintenant passer à la démonstration proprement dite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varepsilon/2 > 0$, on a que

— comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on peut fixer $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

— comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$, on peut fixer $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a

$$|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$ ³, alors on a $N \geq N_1$ et $N \geq N_2$.

Soit maintenant $n \geq N$, on a alors que d'une part $n \geq N_1$ donc $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et que d'autre part $n \geq N_2$ donc $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le calcul qui a été mené en début de preuve, on a alors

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a bien trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon$. Au final, nous avons donc bien démontré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$ comme voulu. □

3. PRODUIT DE LIMITES

Théorème. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) \times \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$$

La preuve de ce théorème est plus délicate, et utilise le fait que toute suite convergente est bornée. On va seulement en donner l'idée, en faisant une analyse proche de celle qu'on a faite au début de la preuve du théorème sur les sommes de limites.

Démonstration. Soit comme avant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, et soit $n \in \mathbb{N}$, essayons de borner $|u_n \times v_n - \ell \times \ell'|$. Pour cela, l'idée est de "chainer des inégalités" triangulaires : on veut dire que $u_n \times v_n$ n'est pas très loin de $\ell \times v_n$, qui lui-même n'est pas très loin de $\ell \times \ell'$. Plus formellement, on écrit

$$u_n \times v_n - \ell \times \ell' = (u_n \times v_n - \ell \times v_n) + (\ell \times v_n - \ell \times \ell'),$$

et donc par inégalité triangulaire

$$|u_n \times v_n - \ell \times \ell'| \leq |u_n \times v_n - \ell \times v_n| + |\ell \times v_n - \ell \times \ell'|.$$

On a, d'après le résultat vu et démontré en cours $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell \times v_n = \ell \times \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \times \ell'$, donc le terme de droite dans l'inégalité ci dessus (c'est-à-dire $|\ell \times v_n - \ell \times \ell'|$) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Restera à borner le terme de gauche $|u_n \times v_n - \ell \times v_n|$. Pour cela on le réécrit tout d'abord en factorisant : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n \times v_n - \ell \times v_n| = |v_n \times (u_n - \ell)| = |v_n| \times |u_n - \ell|.$$

L'idée est maintenant d'utiliser le fait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc est bornée : on a ainsi un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$. On a alors par multiplication d'une inégalité par un terme positif : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n \times v_n - \ell \times v_n| = |v_n| \times |u_n - \ell| \leq M \times |u_n - \ell|.$$

3. On pourrait aussi poser $N = N_1 + N_2$, l'important est d'exhiber un entier N qui vérifie à la fois $N \geq N_1$ et $N \geq N_2$.

On conclut alors notre analyse du problème par l'inégalité suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad |u_n \times v_n - \ell \times \ell'| \leq M \times |u_n - \ell| + |\ell \times v_n - \ell \times \ell'|.$$

L'idée est maintenant la même que pour la somme : étant donné $\varepsilon > 0$, pour n suffisamment grand, les deux termes de droite seront plus petit que $\varepsilon/2$ ce qui permettra de conclure.

Soit donc $\varepsilon > 0$.

- (terme $M \times |u_n - \ell|$) Comme $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on peut fixer $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

- (terme $|\ell \times v_n - \ell \times \ell'|$) Comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et comme d'après le cours $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell \times v_n = \ell \times \ell'$, on peut fixer $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a

$$|\ell \times v_n - \ell \times \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit alors $N = \max(N_1, N_2)$, et soit $n \geq N$, alors $n \geq N_1$ donc $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ et $n \geq N_2$ donc $|\ell \times v_n - \ell \times \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En combinant ces deux inégalités avec (1), on obtient :

$$|u_n \times v_n - \ell \times \ell'| \leq M \times \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a l'inégalité $|u_n \times v_n - \ell \times \ell'| \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve. $\square$