

Travaux dirigés

Analyse

Table des matières

TD 1 : relation d'ordre de la droite réelle	2
TD 2 : suites réelles	3
TD 3 : suites réelles et suites extraites	5
TD 4 : fonctions de la variable réelle (définition, limite et continuité)	6
TD 5 : fonctions de la variable réelle (dérivation)	8
TD 6 : fonctions logarithme et exponentielle	10
TD 7 : fonctions trigonométriques	11
TD 8 : révisions de limites, utilisation des fonctions équivalentes	12
TD 9 : trigonométrie hyperbolique	13
TD 10 : intégration (méthodes de base)	14
TD 11 : intégration (changement de variable)	15
TD 12 : intégration (révisions)	16
TD 13 : équations différentielles linéaires du premier ordre	17
TD 14 : équations différentielles linéaires du deuxième ordre	18

Le minimum

Exercice 12.

Les suites ci-dessous sont définies par leur premier terme et une relation de récurrence valable pour tout n de $\mathbb{N}$. Dans chaque cas, donner l'expression du terme général, la limite (si elle existe) et la somme des 100 premiers termes de la suite.

- | | |
|---|---|
| 1. $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n \\ u_0 &= 3 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} w_{n+1} &= -2w_n \\ w_0 &= 3 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} v_{n+1} &= 2 + v_n \\ v_0 &= 3 \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} x_{n+1} &= x_n/2 \\ x_0 &= 3 \end{cases}$ |

Exercice 13.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Que vaut u_{1000} ?

Exercice 14.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par u_0 (donné), et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 2$.

1. (Exemple) Calculer u_{1000} pour les valeurs suivantes de u_0

(a) $u_0 = 0$

(b) $u_0 = 1$

(c) $u_0 = -2$

2. On veut montrer que la suite (u_n) est périodique quelque soit le choix de u_0 . Trouver λ dans $\mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout n dans $\mathbb{N}$, par $v_n = u_n + \lambda$ soit géométrique.
3. Dédurre de la question précédente que, pour tout choix de u_0 , la suite (u_n) est périodique.

Exercices supplémentaires

Exercice 15.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Que vaut u_{1000} ?

Exercice 16.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

1. Donner l'expression du terme général u_n .
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ est bien définie.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 17.

On se donne trois nombres réels C , a et b , et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \\ u_0 &= C \end{cases}$$

1. On suppose $a = 1$. Donner une expression simple du terme général u_n .
2. On suppose $a \neq 1$.
 - (a) Trouver m tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + m)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique.
 - (b) En déduire, pour tout n dans $\mathbb{N}$, une expression de u_n .
3. On emprunte 100 000 euros au taux mensuel de 0,2 % (ce qui signifie que si on doit une somme S le premier jour du mois, juste après avoir payé la mensualité, on devra $1.002 \times S$ le premier jour du mois suivant juste avant d'avoir payé la mensualité), et on rembourse l'emprunt par des mensualités de 1000 euros.
 - (a) Quel est le rapport avec le début de l'exercice ?
 - (b) Quel est le montant dû au bout de n mois ?
 - (c) Au bout de combien de temps l'emprunt sera-t-il remboursé ?
 - (d) Quel est le coût total pour l'emprunteur de cette opération ?

Le minimum

Exercice 18.

Pour chacune des suites réelles suivantes, dire si elle est convergente ou non en justifiant.

1. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
2. $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$,
3. $w_n = \exp((-1)^n)$.

Exercice 19.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
4. En raisonnant par l'absurde, conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercices supplémentaires

Exercice 20.

Est-il vrai que de toute suite convergente, on peut extraire une sous-suite monotone convergente ?

Exercice 21.

Est-il vrai que de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite monotone convergente ?

Exercice 22.

Est-il vrai que de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite croissante ?

Exercice 23.

Donner un exemple de suite convergente non monotone (même à partir d'un certain rang).

TD 4: fonctions de la variable réelle (définition, limite et continuité)

Le minimum

Exercice 24.

Les fonctions suivantes sont-elles injective, bijective, surjective ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

3. $f_3 : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$
 $x \mapsto x^2$

2. $f_2 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

4. $f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $x \mapsto x^2$

Exercice 25.

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Est-ce que f est bijective ? Peut-on définir une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Décrire les ensembles suivants

1. $f^{-1}(\mathbb{R})$

5. $f^{-1}(\{-1\})$

2. $f^{-1}([0, +\infty[)$

6. $f^{-1}([-1, 4[)$

3. $f^{-1}(\{0\})$

7. $f^{-1}([4, 9])$

4. $f^{-1}(\{1\})$

8. $f^{-1}(f([2, 3]))$

Exercices supplémentaires

Exercice 26.

Pour n entier supérieur à deux, on définit

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n - nx + 1$$

1. Montrer que f_n s'annule en un unique point, qu'on notera a_n .
2. Étudier la suite $(a_n)_{n \geq 2}$. Préciser notamment son sens de variation, sa limite éventuelle et un équivalent simple.

Exercice 27.

Un randonneur effectue un chemin sans boucle, tracé d'un refuge A à un refuge B. Il part de A à 6 heures (du matin) et arrive à B à 15 heures, en s'arrêtant de temps en temps pour se restaurer ou discuter avec d'autres randonneurs. Quelques jours après, il parcourt le chemin inverse, partant du refuge B à 6 heures du matin et arrivant au refuge A à 15 heures, après s'être arrêté de temps en temps pour se restaurer ou discuter avec d'autres randonneurs. Y a-t-il (au moins) un point du trajet auxquels le randonneur s'est trouvé à la même heure lors des deux parcours aller et retour ?

Exercice 28.

Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pas continue en $\{0\}$ et continue à gauche en $\{0\}$.

Exercice 29.

On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (l'image de tout intervalle est un intervalle).
3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 30.

L'équation $x = \cos(x)$ admet-elle des solutions réelles ?

Exercice 31.

Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'équation $x \sin(x) = \cos(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 32.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que f admette une limite finie en $-\infty$ et une limite finie (pas forcément la même) en $+\infty$. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 33.

Voici un extrait d'un livre d'exercices de première année : « Quel est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$? »

1. Quelle est la réponse attendue ?
2. Au vu de l'exercice 21, expliquer la gêne du responsable de ce cours face à ce type d'énoncés.
3. Auriez-vous une idée de meilleure formulation de l'énoncé ?

Exercice 34.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et sans point fixe ($f(x) \neq x$ pour tout x réel) et x_0 un réel. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Est-ce que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut avoir une limite finie ?

TD 5: fonctions de la variable réelle (dérivation)

Le minimum

Exercice 35. En quels points les fonctions suivantes sont-elles dérivables ? Donner, le cas échéant, une expression de la dérivée.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1 + \cos(\sin(x))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cos(x)}{1+x^2} \end{aligned}$$

Exercice 36. Calculer les limites suivantes (si elles existent).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\cos(x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - e^x}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 37.

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

En quels points la fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 38.

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) + \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de a , b et c la fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? C^1 en 0 ? C^2 en 0 ?

Exercice 39.

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, et dérivable partout sauf en 1, 2 et 3.

Pour aller plus loin

Exercice 40.

Montrer que pour tout n entier supérieur à 2, $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$. En déduire que la suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1} \text{ diverge.}$$

Exercice 41.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et ρ dans $[0, 1[$ tels que $|f'(x)| < \rho$ pour tout x réel. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. On construit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tous n, m dans $\mathbb{N}$ tels que $n < m$, $|x_n - x_m| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} |x_1 - x_0|$.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite que l'on notera l .
3. Que peut-on dire de $f(l)$?
4. On dit qu'un réel a est un point fixe de f si $f(a) = a$. Combien f admet-elle de point fixe ?
5. Comment vous-y prendriez vous pour résoudre numériquement l'équation $2x - \cos(x) = 0$?

TD 6: fonctions logarithme et exponentielle

Le minimum

Exercice 42.

Classer ces nombres par ordre croissant : $2^{(3^4)}$, $(2^3)^4$, $(4^3)^2$, $4^{(3^2)}$, $3^{(2^4)}$, $(3^2)^4$.

Exercice 43.

1. En utilisant la notion de dérivée, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.
2. Quelle est la limite, quand n entier tend vers $+\infty$, de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

Exercice 44.

Quels sont les x réels (si il y en a) tels que $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$?

Exercice 45.

Soit a un nombre réel donné. L'équation en x : $x = \ln(x) + a$ admet-elle des solutions réelles ?

Exercices supplémentaires

Exercice 46.

Soit un réel $a > 0$, on définit alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par : pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout n entier plus grand que 2, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x^a} dx < \frac{1}{n^a} < \int_{n-1}^n \frac{1}{x^a} dx$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si $a > 1$.
4. À quelle condition sur a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Sa limite est souvent notée $\zeta(a)$, et la fonction $a \mapsto \zeta(a)$ est appelée fonction zeta de Riemann.

Exercice 47.

Montrer que pour tout x réel non nul, $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2 \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Exercice 48.

Quelle est la limite, quand n entier tend vers l'infini, de $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$?

Exercice 49.

1. Montrer, en utilisant la notion de dérivation, que $\frac{e^x - 1}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0.
2. Quelle est la limite, quand x tend vers 0, de $\frac{x^x - x^{(x^2)}}{x}$?

TD 7: fonctions trigonométriques

Le minimum

Exercice 50. Donner les valeurs

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\cos(\pi)$ | 3. $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ | 5. $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ |
| 2. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | 4. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | 6. $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ |

Exercice 51. Calculer

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\arccos(\cos(\pi))$ | 4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 7. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ |
| 2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 5. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)\right)$ | 8. $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ |
| 3. $\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ | 6. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$ | 9. $\arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$ |

Exercice 52. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 53. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 54. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 55. Tracer le graphe de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arccos(\cos(x)) \end{aligned}$$

Exercice 56. Montrer que pour tout x réel strictement positif

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Cette formule est-elle encore vraie pour $x < 0$? Pour $x = 0$?

Exercice 57.

Discuter, en fonction de x réel, l'existence et la valeur de la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \cos(kx)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est-elle bornée?

Exercice 58.

Discuter, en fonction de x réel, l'existence et la valeur de la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^n k \sin(kx)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est-elle bornée?

Le minimum

Exercice 59.

Est-il vrai que $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 2$?

Exercice 60.

Est-il vrai que $\ln(x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x + 2)$?

Exercice 61.

Est-il vrai que $e^{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x+2}$?

Exercice 62. Calculer les limites suivantes (si elles existent)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x^2)}{\sin(x^3)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{\sin(x^2)}}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(\sin(x))}{1 - \cos(\sin(x))}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^2)}{\cos(x^3)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{1 - e^x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) \cos(x^2) + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^2)}{1 - \cos(x^3)}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) \cos(x^2)}$

Exercice 63.

Donner un équivalent (simple) de $\sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercices supplémentaires

Exercice 64.

Peut-on trouver deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f = o_0(g)$ et $g' = o_0(f')$?

Exercice 65.

Est-il vrai que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions équivalentes en 0, alors $f \circ h_1$ et $f \circ h_2$ sont équivalentes en 0 ?

Exercice 66.

Est-il vrai que si $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ sont deux fonctions équivalentes en 0, alors $\ln(h_1)$ et $\ln(h_2)$ sont équivalentes en 0 ?

Exercice 67. On note x_n la n -ième solution positive de $x \tan(x) = 1$.

1. Donner un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $x_n - \pi n$ quand n tend vers $+\infty$.

TD 9: trigonométrie hyperbolique

Le minimum

Exercice 68. Calculer

- | | | |
|--|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\sinh(1)$ | 8. $\operatorname{argch}(1)$ | 15. $\operatorname{argsh}(e)$ |
| 2. $\cosh(1)$ | 9. $\operatorname{argsh}(1)$ | 16. $\operatorname{argth}(e)$ |
| 3. $\tanh(1)$ | 10. $\operatorname{argth}(1)$ | 17. $\operatorname{argth}(\tanh(2))$ |
| 4. $\sinh(0)$ | 11. $\operatorname{argch}(0)$ | 18. $\tanh(\operatorname{argth}(2))$ |
| 5. $\sinh(1) + \cosh(1)$ | 12. $\operatorname{argsh}(0)$ | 19. $\operatorname{argch}(\cosh(5))$ |
| 6. $\cosh^2(\sqrt{2}\pi) - \sinh^2(\sqrt{2}\pi)$ | 13. $\operatorname{argth}(0)$ | 20. $\sinh(\operatorname{argch}(1))$ |
| 7. $\sinh(\sqrt{17}) + \sinh(-\sqrt{17})$ | 14. $\operatorname{argch}(e)$ | |

Exercice 69. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cosh(x) = \cosh(3)$.

Exercice 70. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sinh(x) = \sinh(\pi)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 71. Calculer les limites suivantes

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2 \cosh(x))$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \cosh(2x))$ | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{argch}(x) - \ln(x))$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2 \sinh(x))$ | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \tanh(2x))$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{argsh}(x) - \ln(x))$ |

Exercice 72.

Montrer que pour tout x réel, $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$.

Exercice 73.

Montrer que pour tout x réel,

$$\arctan(\sinh(2x)) = 2 \arctan(\tanh(x)).$$

Exercice 74.

Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\arccos\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right) = \arctan(\sinh(x)).$$

Exercice 75.

Est-il vrai que pour tout x réel,

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{\operatorname{argsh}(x)}{\operatorname{argch}(x)}?$$

Le minimum

Exercice 76. Calculer

1. $\int_1^2 x^2 dx$

3. $\int_1^2 e^x dx$

5. $\int_0^{2\pi} \sin(2x) dx$

2. $\int_1^2 dx$

4. $\int_0^\pi \sin(x) dx$

6. $\int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx$

Exercice 77. Calculer

1. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

2. $\int_1^2 \ln(x) dx$

3. $\int_0^1 x^2 \sin(x) dx$

Exercice 78. Trouver a et b réels tels que, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. En déduire le calcul de $\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} dx$.

Exercices supplémentaires

Exercice 79. Trouver a , b et c réels tels que, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$. En déduire le calcul de $\int_2^3 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.

Exercice 80. On veut calculer $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

1. En écrivant $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 1 \frac{1}{1+x^2} dx$ et en intégrant par partie (avec $u' = 1$), exprimer I_2 en fonction de I_1 .

2. Conclure : que vaut I_2 ?

3. Comment pourrait-on calculer $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$?

Exercice 81.

1. Simplifier, pour n et N dans $\mathbb{N}$, $N \geq 1$, $\frac{1}{1 + \left(\frac{n}{N}\right)^2}$.

2. Quelle est la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^N \frac{N}{N^2 + n^2}$?

3. Trouver un N entier tel que

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{N}{N^2 + n^2} - \frac{\pi}{4} \right| < 10^{-3}.$$

4. Est-ce une bonne façon de calculer une approximation de π ?

TD 11: intégration (changement de variable)

Le minimum

Exercice 82. Calculer

1. $\int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) dx$

3. $\int_0^\pi \cos^4(x) \sin^5(x) dx$

5. $\int_0^1 \sin(e^x) e^x dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

4. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

6. $\int_1^2 \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

Exercices supplémentaires

Exercice 83. Calculer

1. $\int_0^\pi \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx$

5. $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}(x)} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx$

4. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

6. $\int_0^1 \frac{1 + \operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$

Exercice 84. Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^1 x \cdot \arctan x \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 16} \, dx$

c) $\int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} \, dx$

d) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

e) $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx$

f) $\int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \, dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

h) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

i) $\int_0^1 \arcsin x \, dx$

j) $\int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 + 2} \, dx$

k) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} \, dx$

l) $\int_0^1 x^2 \operatorname{sh}(x) \, dx$

m) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \, dx$

n) $\int_1^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \, dx$

TD 12: intégration (révisions)

Le minimum

Exercice 85.

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^\pi \sin^2(x) dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx$

5. $\int_0^1 \operatorname{sh}^2(x) dx$

2. $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$

4. $\int_0^1 \operatorname{ch}^2(x) dx$

6. $\int_0^1 \tanh^2(x) dx$

Exercice 86.

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_1^2 \ln(x) dx$

3. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$

2. $\int_1^2 x \ln(x) dx$

4. $\int_1^2 (2x^2 - x + 3) \ln(x) dx$

Exercices supplémentaires

Exercice 87.

Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$?

Exercice 88.

Calculer $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$.

Exercice 89.

On donne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(s) ds = +\infty$.

1. Montrer que, pour tout k entier,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(s) ds \leq f(k).$$

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $\left(\int_0^n f(s) ds \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Donner un équivalent simple, quand n tend vers l'infini, de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sum_{k=0}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

TD 13: équations différentielles linéaires du premier ordre

Le minimum

Exercice 90.

Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y + 1$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 91.

Résoudre l'équation différentielle $y'(x) = -2y(x) + e^{-x}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 92.

Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) = -xy(x) - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 93.

L'équation différentielle $y'(x) + xy''(x) = x^2$ est-elle du premier ordre ? La résoudre en posant $u = y'$.

Exercice 94.

Résoudre l'équation différentielle (dite « de Bernoulli »)

$$y'(x) + xy(x) = y^2(x).$$

(On pourra poser $u = 1/y$ et montrer que u est solution d'une équation différentielle linéaire.)

Exercice 95.

Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli

$$y'(x) + xy(x) = y^3(x).$$

(On pourra poser $u = y^\alpha$ avec $\alpha < 0$ bien choisi.)

Exercice 96.

Résoudre l'équation différentielle (dite « de Ricatti »)

$$y' = -1 - y(x) + 2y^2(x).$$

(On pourra chercher une solution évidente y_0 , poser $y = y_0 + u$, trouver une équation différentielle vérifiée par u et poser $z = 1/u$).

TD 14: équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Le minimum

Exercice 97.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 1$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 98.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 99.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = xe^{2x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 100.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 1$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 101.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice supplémentaire

Exercice 102.

On veut résoudre l'équation différentielle $y'(x) = e^{-x} + y(x) + e^x y(x)^2$ (équation dite « de Ricatti »).

1. Est-ce que cette équation est linéaire ?
2. Poser $v(x) = e^x y(x)$ et montrer que v vérifie une équation différentielle non linéaire du premier ordre.
3. Poser $v = -u'(x)/u(x)$ et montrer que u vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.
4. Trouver u , puis v et résoudre l'équation de départ.