Contrôle 2 - corrigé

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême. Tous documents autorisés. Calculatrices autorisées.

Exercice 1. USB en feu.
Un fabricant de chargeur USB prétend que la température moyenne de fonctionnement de ses chargeurs est de 65 degrés Celsius dans un environnement à 20 degrés. Afin de tester la véracité de cette affirmation, on teste 10 chargeurs en les faisant charger pendant 1h dans une salle à 20 degrés, on obtient une température moyenne de 79° et l'écart-type de l'échantillon est de 10°. On suppose que la loi mère de cet échantillon est gaussienne de moyenne μ degrés Celsius.

1. En notant $\bar{X}$ la température moyenne mesurée et S^2 la variance de l'échantillon, quelle est la loi suivie par
$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{10}}}?$$
On note F sa fonction de répartition.
2. On cherche à tester l'affirmation du fabriquant.
   a) Déterminer l'hypothèse nulle.
   b) Donner la formule permettant de déterminer la P-valeur associée. On pourra s'appuyer sur la fonction F définie à la question précédente (sans donner son expression exacte).
3. On trouve une P-valeur de 0,0002. Que concluez-vous ?

Solution de l'exercice 1.

1. D'après le cours il suit la loi de Student à 9 degrés de liberté.
2. a) L'hypothèse nulle est $\mu = 79$.
   b) Notre test donne $\bar{x} = 79$, $s = 10$ donc $\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{10}}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = 4,4$, la P-valeur est donc
$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{10}}} \geqslant 4,4\right) = 1 - F(4,4) = 0,0002.$$
3. On peut conclure avec un risque de 1 pour 1000 que le fabricant ment.

Exercice 2. Sondage.
Une enquête sur 1000 personnes tirées au hasard parmi la population française effectuée en 2020 donne que 20 d'entre elles sont végétariennes.

1. En utilisant la méthode du pivot et une approximation gaussienne que l'on justifiera, indiquer un intervalle de confiance à 95% pour la proportion de personnes végétariennes en France en 2020.
2. On effectue le même sondage en 2025, on obtient 40 personnes végétariennes parmi 1000 tirées au hasard. Peut-on conclure que le pourcentage de personnes végétariennes en France a augmenté ? On raisonnera avec un taux de risque de 5%.

Solution de l'exercice 2.

1. Ici on fait une approximation gaussienne valide car $0,02 \cdot 0,98 \cdot 1000 = 19{,}6 > 12$: la statistique
$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{\sqrt{1000}}}}$$
suit approximativement une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, et on trouve l'intervalle de confiance à 95% asymptotique $2\% \pm 0{,}87\%$.
2. On peut de même donner l'intervalle de confiance à 95% asymptotique $4\% \pm 1{,}21\%$. Comme les deux intervalles se recoupent on ne peut pas conclure directement ; on fait alors un test de différence de moyenne en considérant que sous l'hypothèse nulle ($p_1 = p_2$) que $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ suit une loi gaussienne centrée de variance $p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})$ où $p = \frac{p_1+p_2}{2}$ et on remplace p_1 et p_2 par leurs estimateurs, ce qui comme

zone d'acceptation de l'hypothèse nulle l'intervalle de bornes $\pm 1,96\sqrt{\frac{0,03 \cdot 0.97}{500}}$ soit $\pm 0,7\% < 2\%$. On peut donc affirmer avec un risque de 5% que le pourcentage de personnes végétariennes a évolué, et donc au vu de l'observation qu'il a augmenté.

Exercice 3. Brouillard à Noël.

On suppose que le taux d'humidité (qui est compris entre 0 et 1) à l'extérieur de Polytech Dijon le 24 décembre à minuit suit une loi mère dont la densité est donnée par : pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_\lambda(x) = \lambda \frac{e^{\lambda x}}{e^\lambda - 1},$$

et $f_\lambda(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$, où $\lambda > 0$ est un paramètre que l'on cherche à déterminer.

1. Calculer la fonction de répartition de la loi mère en fonction de λ.
2. Montrer que l'espérance de la loi mère est égale à $\dfrac{e^\lambda(\lambda-1)+1}{\lambda(e^\lambda-1)}$.
3. Expliquer comment la méthode des moments permet d'estimer λ. On admettra que la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: &]0,+\infty[& \to & \left]\frac{1}{2},1\right[\\ & \lambda & \mapsto & \dfrac{e^\lambda(\lambda-1)+1}{\lambda(e^\lambda-1)} \end{array}$$

   est une bijection continue strictement croissante, dont la bijection réciproque g^{-1} est continue.
4. Calculer la variance de la loi mère en fonction de λ.
5. (bonus) En observant l'humidité le 24 décembre à minuit à l'extérieur de Polytech Dijon pendant les 100 dernières années, on observe une humidité moyenne de 85%, ce qui donne par la méthode des moments que $\lambda = 6{,}6$. En utilisant une approximation gaussienne, donner un intervalle de confiance à 95% pour λ.

Solution de l'exercice 3.

1. Par définition, on a que la fonction de répartition est donnée par :

$$F_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\lambda(x)dx,$$

   or pour tout $x < 0$ et tout $x > 1$ on a $f_\lambda(x) = 0$ donc pour tout $t < 0$ on a $F_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dx = 0$ tandis que pour tout $t > 1$ on a $F_\lambda(t) = 1 - \int_t^\infty 0 \cdot dx = 1$. Enfin, pour tout $t \in [0,1]$, on calcule

$$\begin{aligned} F_\lambda(t) &= \int_0^t \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} e^{\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{e^\lambda - 1}[e^{\lambda x}]_0^t \\ &= \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^\lambda - 1}. \end{aligned}$$

2. Notons X une variable aléatoire de loi la loi mère ; alors X est à valeur dans $[0,1]$ et comme la densité est f_λ il s'agit de calculer
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} x e^{\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\int_0^1 x e^{\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\left(\left[\frac{x e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right) \\ &= \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\left(\frac{e^\lambda}{\lambda} - \frac{e^\lambda - 1}{\lambda^2}\right) \\ &= \frac{\lambda e^\lambda - e^\lambda + 1}{\lambda(e^\lambda - 1)} \\ &= \frac{e^\lambda(\lambda - 1) + 1}{\lambda(e^\lambda - 1)}\end{aligned}$$

3. La méthode des moments nous garantit que $\bar{X}_n$ converge vers l'espérance de X lorsque n tend vers $+\infty$, en particulier $g^{-1}(\bar{X}_n)$ converge vers $\lambda = g^{-1}(\mathbb{E}(X))$ quand la taille de l'échantillon n tend vers $+\infty$, par continuité de g^{-1}.
4. De manière similaire à la question 2, on caclule désormais l'espérance de X^2 où X suit la loi de densité f_λ, ce qui donne
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} x^2 e^{\lambda x} dx &= \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\int_0^1 x^2 e^{\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\left(\left[\frac{x^2 e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right),\end{aligned}$$
or d'après la question 2 on a $\int_0^1 x e^\lambda x = \frac{e^\lambda(\lambda-1)+1}{\lambda^2}$ d'où
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{e^\lambda - 1}\left(e^\lambda - 2\cdot\frac{e^\lambda(\lambda - 1) + 1}{\lambda^2}\right) \\ &= \frac{e^\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 2}{\lambda^2(e^\lambda - 1)}\end{aligned}$$
d'où finalement la variance
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{e^\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 2}{\lambda^2(e^\lambda - 1)} - \left(\frac{e^\lambda(\lambda - 1) + 1}{\lambda(e^\lambda - 1)}\right)^2$$

5. Pour $\lambda = 6,6$ on trouve que la variance vaut $0{,}74 - (0,85)^2 = 0,02$, d'où l'intervalle de confiance approximatif pour la moyenne : $0{,}85 \pm 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}02}}{\sqrt{100}} = 85\% \pm 2{,}8\%$ soit $[82{,}2; 87{,}8]$ En appliquant la fonction g^{-1} (par calcul numérique), on trouve l'intervalle de confiance à 95% pour λ suivant : $[5{,}5; 8{,}1]$.