Contrôle 1

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême. Tous documents autorisés. Calculettes autorisées.

Exercice 1. Loi exponentielle.
Soit $\lambda > 0$. On rappelle que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre λ a pour densité la fonction

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$.

1. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Soit $a \geqslant 0$ et soit $t > 0$, montrer que $\mathbb{P}(X \leqslant a + t | X \geqslant a) = F_X(t)$.

Solution de l'exercice 1.

1. Par définition, la fonction de répartition F_X est donnée par : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$ et donc $F_X(t) = \int_{-\infty} t f_1(x)dx = 0$ si $t \leqslant 0$ car $f_1(x) = 0$ pour tout $x \leqslant 0$. Et si $t > 0$, $F_X(t) = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}$.
2. L'espérance de X est donnée par la formule suivante : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx$. Ainsi comme $f_1(x) = 0$ pour tout $x \leqslant 0$ on a , en effectuant une intégration par partie à la troisième ligne :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \\ &= \lim_{a\to+\infty} \int_0^a xe^{-x}dx \\ &= \lim_{a\to+\infty} \left([-xe^{-x}]_0^a - \int_0^a -e^{-x}dx\right) \\ &= \lim_{a\to+\infty} \left(-ae^{-a} + [-e^{-x}]_0^a\right) \\ &= \lim_{a\to+\infty} -ae^{-a} + 1 - e^{-a} \\ &= 1.\end{aligned}$$
3. On a par définition
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant a + t | X \geqslant a) &= \frac{\mathbb{P}(X \leqslant a + t \text{ et } X \geqslant a)}{\mathbb{P}(X \geqslant a)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \in [a, a + t])}{\mathbb{P}(X \geqslant a)},\end{aligned}$$
or $\mathbb{P}(X \in [a, a + t]) = \int_a^{a+t} f_1(x)dx = \int_a^{a+t} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_a^{a+t} = e^{-a} - e^{-a-t}$. D'autre part, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \int_a^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-a}$, d'où
$$\mathbb{P}(X \leqslant a + t | X \geqslant a) = \frac{e^{-a} - e^{-a-t}}{e^{-a}} = 1 - e^{-t} = F_X(t).$$

Exercice 2. Taille normale.
On suppose que la distribution de la taille parmi les femmes françaises suit une loi normale $\mathcal{N}(1,63\text{m}; 36\text{cm}^2)$ tandis que la taille parmi les hommes français suit une loi normale $\mathcal{N}(1,75\text{m}, 64\text{cm}^2)$. On choisit au hasard une femme française et un homme français. Exprimer sous forme d'une intégrale la probabilité que la femme soit plus grande que l'homme. On pourra dans un premier temps décrire la loi de la variable aléatoire "différence entre la taille de la femme et la taille de l'homme en centimètres".

Solution de l'exercice 2. Notons T_1 la taille de la femme tirée au hasard en centimètres, T_2 la taille de l'homme tiré au hasard en centimètres. Les deux variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes au vu du choix au hasard, et suivent les lois suivantes : $T_1 \sim \mathcal{N}(163; 36)$ et $T_2 \sim \mathcal{N}(175, 64)$. D'après le cours, leur différence $D = T_1 - T_2$ est une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(163 - 175, 36 + 64)$, donc $D \sim \mathcal{N}(-12, 100)$ a pour variance 10. Observons que $T_1 \geqslant T_2$ ssi $D \geqslant 0$, donc étant donné l'expression de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a

$$\mathbb{P}(T_1 \geqslant T_2) = \mathbb{P}(D \geqslant 0) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+12)^2}{100}} dx.$$

Application numérique (qui n'était pas demandée) : on trouve environ $11,5\%$.

Exercice 3. Pièces truquées.

Alice dispose de 6 pièces truquées et indistinguables, numérotées de 1 à 6, telles que pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$ la pièce numéro i a i chances sur 7 de tomber sur pile lors d'un pile ou face : ainsi la première pièce a 1 chance sur 7 de tomber sur pile, et la dernière a 6 chances sur 7 de tomber sur pile.

Alice choisit une pièce au hasard en lançant un dé équilibré à 6 faces : si le dé renvoie i, elle choisit la pièce numéro i. Puis elle donne cette pièce à Bob, qui ne sait donc pas laquelle c'est.

1. On note Y le numéro de la pièce choisie par Alice. Quelle est la loi de Y ? (On donnera, pour chaque $i \in \{1, \dots, 6\}$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = i)$).
2. Bob effectue 10 lancers de pile ou face avec la pièce. On note X le nombre de pile obtenus.
   a) Pour $i \in \{1, \dots, 6\}$, donner la loi de X sachant que $Y = i$ (on exprimera, pour $j \in \{1, \dots, 10\}$, $\mathbb{P}(X = j | Y = i)$).
   b) Bob obtient 4 fois pile et 6 fois face. Quelle est la pièce qui a la plus grande chance d'avoir été choisie par Alice ?

Solution de l'exercice 3.

1. Y suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$ ainsi pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$ on a $\mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{6}$.
2. a) Sachant que $Y = i$, X suit alors une loi binomiale de paramètres $(10, \frac{i}{6})$, d'où

$$\mathbb{P}(X = j | Y = i) = \binom{10}{j} \left(\frac{i}{7}\right)^j \left(\frac{7-i}{7}\right)^{10-j}.$$

   b) Ici, il s'agit de trouver $i \in \{1, \dots, 6\}$ afin de maximiser

$$\mathbb{P}(Y = i | X = 4).$$

   D'après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(Y = i | X = 4) = \mathbb{P}(X = 4 | Y = i) \frac{\mathbb{P}(Y=i)}{\mathbb{P}(X=4)}$, et donc comme $\frac{\mathbb{P}(Y=i)}{\mathbb{P}(X=4)} = \frac{1}{6\mathbb{P}(X=4)}$ ne dépend pas de i, il s'agit de maximiser $\mathbb{P}(X = 4 | Y = i) = \binom{10}{4} \left(\frac{i}{7}\right)^4 \left(\frac{7-i}{7}\right)^6$, donc de maximiser $i^4(7-i)^6$, où $i \in \{1, \dots 6\}$. On pourrait faire une étude de fonction et calculer les deux valeurs entières autour de son maximum, mais on peut aussi calculer directement les 6 valeurs possibles :

i	1	2	3	4	5	6
$i^4(7-i)^6$	46 656	250 000	331 776	186 624	40 000	1 296

   Ainsi, $\mathbb{P}(Y = i | X = 4)$ est maximisé pour $i = 3$: il est donc plus probable que ce soit la pièce numéro 3 qui ait été choisie par Alice.

   On peut aller plus loin et voir cet exercice comme un cas d'application de la méthode bayésienne, et calculer l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = 4$, ce qui après un calcul similaire donne

$$\mathbb{E}(Y | X = 4) = \frac{\sum_{i=1}^6 i \times i^4(7-i)^6}{\sum_{i=1}^6 i^4(7-i)^6} = \frac{2\,496\,256}{856\,352} \simeq 2,9,$$

   donc la méthode bayésienne permet d'estimer le paramètre p de la loi de Bernoulli suivie par la pièce à $\frac{2,9}{10} = 0,29$.