
Contrôle 1

Durée : 1h15.

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barème. Tous documents autorisés. Calculatrices autorisées.

Exercice 1. Loi exponentielle.

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre λ a pour densité la fonction

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$.

1. Calculer la fonction de répartition F_X de X .
2. Calculer l'espérance de X .
3. Soit $a \geq 0$ et soit $t > 0$, montrer que $\mathbb{P}(X \leq a + t | X \geq a) = F_X(t)$.

Exercice 2. Taille normale.

On suppose que la distribution de la taille parmi les femmes françaises suit une loi normale $\mathcal{N}(1,63\text{m}; 36\text{cm}^2)$ tandis que la taille parmi les hommes français suit une loi normale $\mathcal{N}(1,75\text{m}, 64\text{cm}^2)$. On choisit au hasard une femme française et un homme français. Exprimer sous forme d'une intégrale la probabilité que la femme soit plus grande que l'homme. On pourra dans un premier temps décrire la loi de la variable aléatoire "différence entre la taille de la femme et la taille de l'homme en centimètres".

Exercice 3. Pièces truquées.

Alice dispose de 6 pièces truquées et indistinguables, numérotées de 1 à 6, telles que pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$ la pièce numéro i a i chances sur 7 de tomber sur pile lors d'un pile ou face : ainsi la première pièce a 1 chance sur 7 de tomber sur pile, et la dernière a 6 chances sur 7 de tomber sur pile.

Alice choisit une pièce au hasard en lançant un dé équilibré à 6 faces : si le dé renvoie i , elle choisit la pièce numéro i . Puis elle donne cette pièce à Bob, qui ne sait donc pas laquelle c'est.

1. On note Y le numéro de la pièce choisie par Alice. Quelle est la loi de Y ? (On donnera, pour chaque $i \in \{1, \dots, 6\}$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = i)$).
2. Bob effectue 10 lancers de pile ou face avec la pièce. On note X le nombre de pile obtenus.
 - a) Pour $i \in \{1, \dots, 6\}$, donner la loi de X sachant que $Y = i$ (on exprimera, pour $j \in \{1, \dots, 10\}$, $\mathbb{P}(X = j | Y = i)$).
 - b) Bob obtient 4 fois pile et 6 fois face. Quelle est la pièce qui a la plus grande chance d'avoir été choisie par Alice?