Cerlutes denses dans les espaces de Kechris

R : rel d'équivalence pmp ($\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ pmp $\longrightarrow$ $R = R_\alpha = \{(x,\gamma x)\}$)

$\rightsquigarrow$ $M(A) = \int_X |A_x| \, d\mu(x)$

$\rightsquigarrow$ m proba équivalente à M

$Sub(R)$ est muni de la topo induite par $d_m(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = m(\mathcal{S}_1 \Delta \mathcal{S}_2)$

sous relat° de R

$Sub_{hyp}(R) := \{$rel hyperfinies$\}$ est fermé

$= \bigcup_n R_n$

$R_n \subseteq R_{n+1}$, $\forall n$

R_n finie

$[R] := \{T : X \circlearrowleft X$ bij pmp : $\forall x$, $(x, T(x)) \in R\}$

$[[R]] := \{\varphi : \mathrm{dom}\,\varphi \subseteq X \to \mathrm{rng}\,\varphi \subseteq X$ injectio $\forall x \in \mathrm{dom}\,\varphi$ $(x, \varphi(x)) \in R\}$

pseudo groupe plein

comme R pmp, φ est pmp (en particulier $\mu(\mathrm{rng}\,\varphi) = \mu(\mathrm{dom}\,\varphi)$).

<u>Fait</u> : $R \setminus \Delta_X$ est une réunion dénombrable de graphes de φ_n involutions tq $\varphi_n(x) \neq x$ $\forall x \in \mathrm{dom}\,\varphi_n$ (on identifie φ_n à son graphes)

$R \setminus \Delta_X \subseteq \bigcup_n \varphi_n$ et $M(\varphi_n) = \mu(\mathrm{dom}\,\varphi_n)$

On vérifie que $\mathcal{S}_k \to \mathcal{S}$ ssi $\forall n$ $M((\mathcal{S}_k \Delta \mathcal{S}) \cap \varphi_n) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ $\forall n$

$[R] \triangleleft Aut(R) := \{T : X \circlearrowleft$ bij pmp $/ T \times T(R) = R\}$

On a une act° de $Aut(R)$ sur $Sub(R)$ (et sur $MAlg(R, M)$)

$$T \bullet \mathcal{S} = (T \times T(\mathcal{S}))$$

$$\forall \varphi \in [[R]] \qquad T \bullet \varphi = T \times T(\varphi) = T \varphi T^{-1}$$

<u>Déf</u> : $\mathcal{S}$ est <u>apériodique</u> si toutes ses classes sont infinies. (NB : ergo $\Rightarrow$ apériodique)

R <u>ergodique</u> $\longrightarrow$ L'<u>indice</u> de $\mathcal{S}$ dans R est le nombre de $\mathcal{S}$-classes à l'intérieur d'une R-classe (bien déf par ergodicité de R) (fini ou ∞)

$\mathcal{S}$ est <u>partout d'indice</u> infini si $\forall A \subseteq X$, $\mathcal{S}_{\restriction A}$ est d'indice ∞ dans $R_{\restriction A}$

<u>Ex</u> : prenons $A \subseteq X$ ($\mu(A) > 0$, $\mu(A) < 1$) $\quad \mathcal{S} := \Delta_{X \setminus A} \cup R_{\restriction A}$ est d'indice ∞ dans R, mais pas partout !

- Si $\mathcal{S}$ ergodique d'indice ∞, elle est partout d'indice infini

ex : $\quad \mathbb{Z}^2 \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ Bernoulli

$R = R_\sigma$

$\mathcal{S} = R_{\sigma((0,1))}$ est ergodique d'indice infini

<u>Thm</u> (LM) $\mathcal{R}$ ergodique pmp. $\mathcal{S} \in \mathrm{Sub}(\mathcal{R})$, s'équivalent :

(i) $\mathcal{S}$ est apériodique partout d'indice infini

(ii) $\mathcal{S}$ apériodique et l'adhérence de sa $[\mathcal{R}]$-orbite contient Δ_X

(iii) $\mathcal{S}$ ——— $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$-orbite contient Δ_X

(iv) L'adhérence de la $[\mathcal{R}]$-orbite de $\mathcal{S}$ contient $\mathrm{Sub}_{hyp}(\mathcal{R})$

(v) ——— $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ ———

De plus, si $\mathcal{S} \in \mathrm{Sub}_{hyp}(\mathcal{R})$, sa $[\mathcal{R}]$-orbite est maigre dans $\mathrm{Sub}_{hyp}(\mathcal{R})$.
(contenu dans $\bigcup_n F_n$, fermés d'intérieur vide)

<u>Q°</u> : est-il vrai que les $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$-orbites dans $\mathrm{Sub}_{hyp}(\mathcal{R})$ sont maigres ?

<u>Cor</u> : Soit $\mathcal{R}_0$ la relat° d'équivalence pmp ergodique hyperfinie ! L'act° de $[\mathcal{R}_0]$ sur $\mathrm{Sub}(\mathcal{R}_0)$ est topologiquement transitive et à orbites maigres.
↳ à orbites denses

<u>Pr</u> : Il existe bien $\mathcal{S}$ satisfaisant (i) d'après l'exemple précédent. □

<u>Preuve du théorème</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & (i) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[ddl, Rightarrow, bend right=60] & \\
(ii) \arrow[rr, Rightarrow] & & (iii) \arrow[ul, Rightarrow] \\
(iv) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & (v) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[uul, Rightarrow, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

(les $\Rightarrow$ non directes sont en rouge)

(v) $\Rightarrow$ (i) Par l'absurde.

Si $\mathcal{S}$ n'est pas apériodique, montrons que $\overline{\mathrm{Aut}(\mathcal{R})\cdot\mathcal{S}}$ ne contient pas $\mathrm{Sub}_{hyp}(\mathcal{R})$

$\Downarrow$

$\exists n \mid \underbrace{\mu(x \,/\, |[x]_{\mathcal{S}}| < n)}_{=:\delta} > 0$

donc $\underbrace{\forall T_1, \dots, T_n \in [\mathcal{R}],\quad M(\mathcal{S} \cap T_1 \cup \dots \cup T_n) \leq n - \delta}_{\text{définit un fermé de } \mathrm{Sub}(\mathcal{R}) \ \mathrm{Aut}(\mathcal{R})\text{-invariant}}$

dans $\mathrm{MAlg}(\mathcal{R}, M)$ $A_n \to A$ si $\forall B$ de mesure finie $M(B \cap (A_n \Delta A)) \to 0$

Ce fermé ne contient aucune sous-relat° $\mathcal{S}$ apériodique car si $\mathcal{T}$ apériodique, on peut trouver $T_1, \dots, T_n \in [\mathcal{T}]$ de graphes disjoints $\to M(\mathcal{T} \cup (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n)) = n$

(iii) $\Rightarrow$ (i) et fin de (v) $\Rightarrow$ (i) : Mq si $\mathcal{S}$ n'est pas partout d'indice infini alors $\overline{\mathrm{Aut}(\mathcal{R})\cdot\mathcal{S}} \not\ni \Delta_X$

<u>Lemme</u> : Si $\mathcal{R}$ ergodique $\forall A, B \subseteq X$ tq $\mu(A) = \mu(B)$ $\exists \varphi \in [[\mathcal{R}]]$ $\mathrm{dom}\,\varphi = A$, $\mathrm{rng}\,\varphi = B$.

Si $\mathcal{S}$ n'est pas portant d'ind. ∞ : on a $\underset{\hookrightarrow \text{ non nul}}{A \subseteq X}$ sur lequel $\mathcal{S}$ est d'indice k

soit N tq $\frac{1}{N} \leq \mu(A)$

Soit $B \subseteq X$ de mesure $\frac{1}{2kN}$ $\underset{\text{lemme}}{\rightsquigarrow}$ $(\varphi_i)_{i=1}^{2kN}$ tq $\forall i$ $\operatorname{dom} \varphi_i = B$

et $\varphi_1 = \mathrm{id}_B$

et $(\operatorname{rng} \varphi_i)_{i=1}^{2kN}$ partit° de X

Soit $B_0 := \{x \in B \mid$ il y a au moins $k+1$ indices i tq $\varphi_i(x) \in A\}$

$\rightsquigarrow$ $A_0 := \{x \in A \mid \exists i,\ \varphi_i^{-1}(x) \in B_0\}$

$\mu(A_0) \leq 2kN\,\mu(B_0)$ (car recouvert par les φ_i-translatés de B_0)

$A_1 := A \setminus A_0$ est recouvert par des translatés de $B_1 = B \setminus B_0$

mais $\forall x \in B_1$, au plus k indices $i \,/\, \varphi_i(x) \in A_1$

$\rightsquigarrow$ $\mu(A_1) \leq k\,\mu(B_1) \leq \frac{k}{2kN} = \frac{1}{2N}$

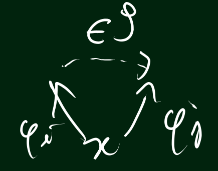
donc $\frac{1}{N} < \mu(A) \leq \frac{1}{2N} + 2kN\,\mu(B_0)$

$\rightarrow$ $\frac{1}{2N} \leq 2kN\,\mu(B_0)$

$\rightarrow$ $\boxed{\mu(B_0) \geq \frac{1}{2kN^2}}$

Par déf de B_0, comme $\mathcal{S}_{\restriction A}$ d'indice k dans $\mathcal{R}_{\restriction A}$,

$\forall x \in B_0$ $\exists i \neq j \,/\, (\varphi_i(x), \varphi_j(x)) \in \mathcal{S}$



$\rightsquigarrow$ $\sum_{1 \leq i < j \leq 2kN} M(\varphi_i^{-1}\varphi_j \cap \mathcal{S}) \geq \mu(B_0) \geq \frac{1}{2kN^2}$

La même conclusion sera vraie de n'importe quel translaté de $\mathcal{S}$ par $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$

(remplacer A par $T(A)$)

or Δ_X ne satisfait pas cette condit° (la mesure est nulle !)

donc $\mathrm{Aut}(\mathcal{R}) \cdot \mathcal{S} \not\ni \Delta_X$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Montrons si $\mathcal{S}$ portant d'indice infini alors $\overline{[\mathcal{R}] \cdot \mathcal{S}} \ni \Delta_X$

il faut trouver (T_n) dans $[\mathcal{R}]$ tq $T_n \cdot \mathcal{S} \setminus \Delta_X \to \emptyset$

$\rightsquigarrow$ Il suffit de mq $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varphi_1, \dots, \varphi_k$ isomét° partielles 2 à 2 disjointes, disjointes de Δ_X

$\exists T \mid \forall i \in \{1, \dots, k\}$, $M(T^{-1} \cdot \mathcal{S} \cap \varphi_i) \leq \varepsilon$

$\Updownarrow$

$M(\mathcal{S} \cap (T \times T)(\varphi_i)) \leq \varepsilon$

On va en fait le montrer pour $\varepsilon = 0$;

on va construire T tq $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\forall x \in \operatorname{dom} \varphi_i$ $(T(x), T\varphi_i(x)) \notin \mathcal{S}$

Soit Γ dnb dense dans $[R]$ $\left(d_u(T_1,T_2) = \mu\{x \mid T_1(x) \neq T_2(x)\} = \mu(T_1 \Delta T_2)\right)$

Thm (Eisenmann - Glasner) Γ agit hautement transitivement sur presque toute R classe

$\Gamma \curvearrowright \Omega$ (dnb) est HT si $\forall k$

$\forall x_1,\dots,x_k \in \Omega$ 2 à 2 distincts
$y_1,\dots,y_k \in \Omega$

$\exists \gamma \in \Gamma \,/\, \forall i \in \{1,\dots,k\},$

$\gamma x_i = y_i$

$\Gamma = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

On construit $\psi \in [[R]]$ par exhaustion, on verra que $\mathrm{dom}\,\psi = X \dashrightarrow T = \psi$!

(but $(\psi(x), \psi\varphi_i(x)) \notin S \quad \forall i \in \{1,\dots,k\}$)

$$\psi = \bigcup_n \psi_n, \quad \psi_n \subseteq \psi_{n+1}$$

$$\psi_0 = \gamma_0 \restriction \{x \in X \mid \forall i\ (\gamma_0 x, \gamma_0 \varphi_i(x)) \notin S\}$$

convention : si $\varphi_i(x)$ pas définie, cette cond° est considérée comme vide donc satisfaite.

Puis, ψ_n étant construit, on l'étend en ψ_{n+1} en utilisant γ_{n+1} :

on pose $\psi_{n+1}(x) = \gamma_{n+1} x$ lorsque :

$x \notin \mathrm{dom}\,\psi_n$, $\gamma_{n+1}(x) \notin \mathrm{rng}\,\psi_n$ et $\forall i \in \{1,\dots,k\}$

(a) si $\varphi_i(x) \in \mathrm{dom}\,\psi_n$ alors $(\gamma_{n+1}x, \psi_n\varphi_i(x)) \notin S$
[pour conserver ce qu'on a déjà !]

(b) si $\varphi_i(x) \notin \mathrm{dom}\,\psi_n$, alors $(\gamma_{n+1}x, \gamma_{n+1}\varphi_i(x)) \notin S$

Soit $\psi = \bigcup_n \psi_n$ mq ψ est domaine de mesure pleine.

Sinon, soit $x \notin \mathrm{dom}\,\psi$, par ergodicité sa R-classe intersecte $X \setminus \mathrm{rng}\,\psi$

soit $i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,k\}$ tq $\psi\varphi_{i_1}(x),\dots,\psi\varphi_{i_l}(x)$ sont définies

et $j_1,\dots,j_{k-l}$ les indices restants.

Comme S est d'intérieur infini dans $X \setminus \mathrm{rng}\,\psi$ on trouve

$z \in [x]_R \setminus \mathrm{rng}\,\psi$

et $z_1,\dots,z_{k-l} \in [x]_R \setminus \mathrm{rng}\,\psi$ tq :

- $\forall m \in \{1,\dots,l\} \quad (z, \psi\varphi_{i_m}(x)) \notin S$
- $\forall m \in \{1,\dots,k-l\}, \quad (z, z_m) \notin S$

Par HT $\exists \gamma \in \Gamma / \gamma x = z$ et $\forall m \in \{1,\dots,k-l\}$

$\gamma\varphi_{j_m}(x) = z_m$

si $\varphi_{j_m}(x)$ est défini

Ccl : $\forall^* x \in X \setminus \mathrm{dom}\,\psi$, $\exists n /$ $\gamma_{n+1}(x) \notin \mathrm{rng}\,\psi$ et $\forall i \in \{1,\dots,k\}$

(a') si $\varphi_i(x) \in \mathrm{dom}\,\psi$ alors $(\gamma_{n+1}x, \psi\varphi_i(x)) \notin S$

(b') si $\varphi_i(x) \notin \mathrm{dom}\,\psi$, alors $(\gamma_{n+1}x, \gamma_{n+1}\varphi_i(x)) \notin S$

On considère le premier n tq $\mu(\{x$ comme ci-dessus$\}) > 0$. Cet ensemble doit être inclus dans $\mathrm{dom}\,\psi_{n+1}$, contradict° !

donc ψ est défini partout, on pose $T = \psi \in [R]$ et on vérifie que T est comme voulu

(i) $\Rightarrow$ (v) On utilise (i) $\Rightarrow$ (iii) et le fait qu'une rel d'éq finie, quitte à restreindre, est engendrée par des (φ_i) comme dans (iii) $\Rightarrow$ (i) ... $\square$