

Some (more) ergodic prop of the Poincaré

G lc base de $\mathbb{N}$

$(X, \mathcal{B})$ standard Borel

$\nu \in \text{Prob}(X)$ $G \curvearrowright (X, \nu)$ non-sing si $g_*\nu \sim \nu \quad \forall g \in G$.

$\mu \in \text{Prob}(G)$ $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ $w_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mu$

$$Z_n(w) = w_1 \dots w_n, \quad w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega$$

D: μ est admissible si $\text{supp}(\mu)$ n'est pas $\subseteq$ sous-groupe propre fermé
et $\exists m: \mu^{*m}$ n'est pas singulière / Haar

D: $(X, \mathcal{B})$ un G -espace. $\nu \in \text{Prob}(X)$ est μ -stationnaire
si $\mu * \nu = \nu$, i.e. $\forall f \in \mathcal{C}(X)$,

$$\int f(gx) d\mu(g) d\nu(x) = \nu(f) = \int f(x) d\nu(x).$$

Ex: Si ν est G -inv, elle est μ -stationnaire.

$\mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathcal{P}\mathbb{F}_2$: il n'y a pas de mesure G -inv mais il existe des mesures stationnaires

P: $G \curvearrowright (X, \mathcal{B})$ par homeo. Si X est compact, $\forall \mu \in \text{Prob}(G)$, $\exists \nu \in \text{Prob}(X)$ μ -stationnaire

P: $\text{Prob}(X)$ compact pour la topo faible-*

$$\nu' \in \text{Prob}(X) \quad \nu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mu^{*i} * \nu$$

$\rightarrow$ un point lim de (ν_n) est μ -stat. $\square$

L: Si μ est admissible sur G . Soit (X, ν) un (G, μ) -espace, i.e. $\mu * \nu = \nu$.
Alors ν est quasi-inv par G .

D: Soit $\mu \in \text{Prob}(G)$. $f \in L^\infty(G)$ est μ -harmonique si

$$\forall g, \int_G f(gg') d\mu(g') = f(g).$$

L: Si ν est μ -stationnaire sur $(X, \mathcal{B})$. Soit $f \in L^\infty(X)$,

$$\Psi_\nu(f): g \in G \mapsto \int_X f(gx) d\nu(x)$$

Alors $\Psi_\nu(f)$ est μ -harmonique.

$\Psi_\nu: L^\infty(X) \rightarrow L^\infty(G)$ a valeurs dans $\text{Har}^\infty(G)$

P: Soit $g \in G$. $\int_G \Psi_\nu(f)(gg') d\mu(g') = \iint f(gg'x) d\nu(x) d\mu(g')$

$$= \iint g'^{-1} f(g'x) d\mu(g') d\nu(x) = \int g'^{-1} f(x) d\nu(x)$$

$$= \int f(gx) d\nu(x) = \Psi_\nu(f)(g). \quad \square$$

$\Psi_\gamma: L^\infty(X) \rightarrow \text{Har}^*(G)$ est linéaire, contractante, unilatère, positive

R: Si $f \in L^\infty(G)$ μ -harmonique, alors $\mathbb{E}[f(gz_{n+1}) | \mathcal{Z}_n] = f(gz_n)$

$$\int_G f(gw_1, \dots, w_{n+1}) d\mu(w_{n+1}) = f(gw_1, \dots, w_n)$$

$\Rightarrow f(gz_n)$ est une martingale

T: (X, γ) un (G, μ) -espace (Furstenberg '63)

Alors il existe $\Omega \rightarrow \text{Prob}(X)$ mesurable telle que presque sûrement:
 $\omega \mapsto \gamma_\omega$

$$Z_n(\omega) * \gamma \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \gamma_\omega \text{ pour la topo faible-}^*$$

P: Soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$ $Z_n(\omega) \gamma(f) = \int f(Z_n(\omega)\alpha) d\gamma(\alpha) = \Psi_\gamma(f)(Z_n(\omega))$

$\Psi_\gamma(f)$ est μ -harmonique. $F_n = \sigma(w_1, \dots, w_n)$

$$\mathbb{E}[\Psi_\gamma(f)(Z_{n+1}) | F_n] = \Psi_\gamma(f)(Z_n(\omega)).$$

Par le théorème de convergence des martingales

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_\gamma(f)(Z_n(\omega)) \text{ existe presque sûrement}$$

Pour presque tout ω , $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \lim Z_n(\omega) * \gamma f$

Par le théorème de représentation de Riesz, $\Leftrightarrow \gamma_\omega \in \text{Prob}(X)$ $\square$

C: En fait $\gamma = \int_\Omega \gamma_\omega dP(\omega)$

mesures limites.

D: On dit que $\gamma \in \text{Prob}(X)$ (telle que (X, γ) est un (G, μ) -espace) est μ -proximale si $\gamma_\omega = \delta_{x(\omega)}$, $x(\omega) \in X$ presque sûrement.

Dans ce cas, (X, γ) est un (G, μ) -bord.

$$Z_n(\omega) \gamma \xrightarrow{} \delta_{x(\omega)}$$

R: Si (X, γ) est un (G, μ) -espace. $\phi: (X, \gamma) \xrightarrow{G\text{-equiv}} Y$ mesurable, G -equiv
 Alors $\phi_* \gamma \in \text{Prob}(Y)$ est μ -stationnaire. facteur de (X, γ)

De même le facteur d'un (G, μ) -bord est un (G, μ) -bord.

$$\begin{aligned} \mu * (\phi_* \gamma)(f) &= \int f(g\phi(x)) d\mu(g) d\gamma(x) \\ &= \int f(\phi(gx)) d\mu(g) d\gamma(x) = \phi_* \gamma(f). \end{aligned}$$

$$\lim_n Z_n(\omega) \phi_* \gamma = \phi_*(\lim_n Z_n \gamma) = \phi(\delta_{x(\omega)}) = \delta_{\phi(x(\omega))}.$$

T: Soit $\mu \in \text{Prob}(G)$ admissible. Il existe un (G, μ) -bord (unique) maximal (B_μ, ν_μ) , i.e. $\forall (X, \nu) (G, \mu)$ -bord, il existe un facteur $(B_\mu, \nu_\mu) \xrightarrow{\phi} (X, \nu)$.

(B_μ, ν_μ) est caractérisé comme l'unique (G, μ) -bord tel que

$\varphi_{\nu_\mu} : L^\infty(B_\mu) \rightarrow \text{Har}^\infty(G)$ est une isométrie surjective

(B_μ, ν_μ) est le bord de Poisson-Furstenberg de (G, μ)

D: Soit (X, ν) un G -espace. On dit que $G \curvearrowright (X, \nu)$ est SAT (fortement approximativement transitive) si $\forall A$ mesurable $\nu(A) > 0$, $\exists (g_n) \in G^\mathbb{N}$ tel $\nu(g_n A) \rightarrow 1$

P: Soit $\mu \in \text{Prob}(G)$ et (X, ν) un μ -bord. Alors (X, ν) est SAT.

P: Soit $A : \nu(A) > 0$.

presque sûrement $\sum_n \nu(g_n A) \rightarrow \int \sum_n \nu(g_n A) d\mu(g) = 1$

$$\nu(A) = \int \nu(g_n A) d\mu(g) > 0$$

Il existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$ tel $\forall \omega \in \Omega_0, \sum_n \nu(g_n A) = 1$.

pour tout $\omega \in \Omega_0, \sum_n \nu(g_n A) \rightarrow 1$. $\square$

P: 1) Si (X, ν) est SAT, $G \curvearrowright (X, \nu)$ est ergodique.

2) _____, il n'existe d'automorphisme $\phi : (X, \nu) \rightarrow (X, \nu)$ qui est G -eq et non trivial. $\phi_* \nu \sim \nu$

P: Supposons que B soit tel que $\nu(B) > 0$ et $\nu(B \cap \phi B) = 0$.

$\exists (g_n)$ telle que $\nu(g_n B) \rightarrow 1$. $\nu(g_n \phi B) = \underbrace{\nu(\phi g_n B)} \rightarrow 1$.

$\exists m$: $\underbrace{\nu(g_m B \cap \phi g_m B)} > 0$.

$$= \nu(g_m (B \cap \phi B)) = 0. \quad \square$$

C: Si $g \in Z(G)$, alors g agit trivialement sur (X, ν) .

C: Soit G un groupe abélien. Alors G n'admet pas de système dyn SAT.

Idem si G est nilpotent.

Idem si G est virtuellement nilpotent.

T: Pour G virtuellement nilpotent, $\forall \mu \in \text{Prob}(G)$ admissible (Choquet-Deny '61) (B_μ, ν_μ) est trivial.

D: Un groupe G est Choquet-Deny si $\forall \mu$ admissible, (B_μ, ν_μ) est trivial.

T: Si G est de type fini, alors Choquet-Deny $\Leftrightarrow$ virtuellement nilpotent (2019)
(Frisch-Tamuz-Hartmann-Fendowsi).

C: Tout groupe de type fini à croissance polynomiale n'a pas d'action SAT.)

D: Soit (X, ν) un G -espace non régulier.

On dit que (X, ν) est G -isométriquement ergodique si pour toute application mesurable G -eq $X \rightarrow (Y, d)$ où (Y, d) est séparable $\cap G$ par isométries est constante presque partout.

P: Soit (X, ν) un G -espace SAT. Alors (X, ν) est G -isom. erg.

P: Soit $\phi: (X, \nu) \rightarrow (Y, d)$ mesurable G -eq, non-constante.

$\phi_* \nu = \eta \in \text{Prob}(Y)$. $\text{Supp}(\eta) = Y$.

Soit $\varepsilon > 0$. $U = B(y_0, \varepsilon)$, $V = B(y_1, \varepsilon)$ tq $d(y_0, y_1) > 4\varepsilon$.

$A = \phi^{-1}U$, $B = \phi^{-1}V$.

$0 < \nu(A), \nu(B) < 1$

$\exists g \in G : \nu(gA) \geq \max(1 - \nu(A), 1 - \nu(B))$

$\Rightarrow \nu(gA \cap A) \geq 0$, $\nu(gA \cap B) \geq 0$.

$\Rightarrow \eta(gU \cap U) > 0$, $\eta(gU \cap V) \geq 0$.

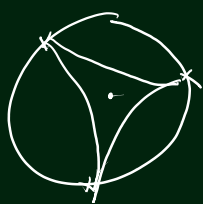
Impossible car action par isométries. $\square$.

C: Si $\mu \in \text{Prob}(G)$, $G \curvearrowright (B_\mu, \nu_\mu)$ est isométriquement ergodique.

Ex: $G \curvearrowright (H_2, d)$ non-élémentaire. Soit $\mu \in \text{Prob}(G)$ admissible

Soit $\phi: B_\mu \rightarrow \text{Prob}(\partial H_2)$ G -eq, mesurable

P: Alors $p.s.$, $\phi(b)$ est supportée sur au plus 2 points de ∂H_2 .



$\text{Prob}_{\text{ss}}(\partial H_2) \rightarrow H_2$ G -eq.

$\Rightarrow \exists$ point fixe dans H_2

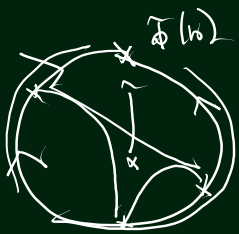
Ω
 $\downarrow \text{bnd}$
 B

P: $p.s.$, $\phi(b)$ est un Dinec.

$\tilde{\phi} \curvearrowright \partial H_2 \xrightarrow{\delta}$

Il existe une unique telle application $B \rightarrow \text{Prob}(\partial H_2)$

$p.s.$ $\mathbb{Z}_n(w) \cdot \nu \rightarrow \phi(\text{bnd}(w)) = \delta_{\tilde{\phi}(n)}$



T: $Z_n(w)_0 \rightarrow \tilde{\Phi}(\text{mod}(w))$ ps $\forall$ o point-base

Dans tout espace hyp propre, on a conv
de la marche aléatoire $Z_n(w)_0 \rightarrow \partial_{\text{Gromov}} X$

R: Crucial $\partial H_2^{(3)} \rightarrow H_2$ mesurable et $\text{Irem}(H_2)$ -eq.

En fait, une telle application est définie en rang supérieur

S: G gp alg de rang sup semisimple (ex SL_3)

alors $\exists (G/P)^3 \rightarrow (G/K)$ définie presque partout G -eq.
— espace métrique CAT(0).

$$P = \left(\begin{array}{c|c} \square & * \\ \hline & \end{array} \right), \quad K \subset SO(3)$$

T: $G \curvearrowright (B, \mu, \nu_\mu)$ est doublement isom ergodique (Kaimanovich)