Actions Gaussiennes et propriétés de Roïaş et Shatila pour les actions de $O(H)$

avec Tomás Ibarlucía

Représentations orthogonales et unitaires

G : groupe topo.

H : espace de Hilbert réel ou complexe

Def : Un homomorphisme continu

$\pi : G \to O(H)$, H réel

$G \to U(H)$, H complexe

est une représentation orthog. ou unitaire

H est l'espace de la représentation

$O(H)$ et $U(H)$ sont équipés de la topo. faible des opérateurs bornés qui en fait des groupes polonais

Def : - Représentations équivalentes

$\pi_1 : G \to U(H_1)$ $\pi_2 : G \to U(H_2)$

π_1 et π_2 sont équivalentes ($\pi_1 \sim \pi_2$) si

$\exists\, \varphi : H_1 \to H_2$ isom. bijective telle que :

$\forall g \in G$, $\varphi \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ \varphi$

- Sous représentations :

$\pi : G \to U(H)$ $\quad K \subset H$ un sev fermé, G-invariant

$\pi^K := g \mapsto \pi(g)_{|K} \in U(K)$ est une rep. unit

π^K est une sous rep. de π

- Si $\pi_1 : G \to U(H_1)$ $\quad \pi_2 : G \to U(H_2)$ sont 2 rep. unit.

On dit que π_2 est contenue dans π_1 $(\pi_2 \subset \pi_1)$

si π_2 est équivalente à une sous rep. de π_1

<u>Def</u>: Complexifiée d'une représentation orthogonale

Soit $\pi : G \to O(H)$

On définit $\pi_{\mathbb{C}} : G \to U(H_{\mathbb{C}})$ où $H_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de H

$$\pi_{\mathbb{C}}(g)(h_1 + ih_2) = \pi(g)h_1 + i\pi(g)h_2$$

<u>Actions p.m.p.</u> :

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace de proba Borel standard

$\mathrm{Aut}(X,\mu)$: groupe des automorphismes de $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$T : X \to X \quad T_*\mu = \mu$$

où $T \sim S$ si $\mu(T \neq S) = 0$

<u>Opérateur de Koopman</u> :

Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. On définit $U_T : L^2_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(\mu) \to L^2_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(\mu)$

$$h \mapsto h \circ T^{-1}$$

est l'opérateur de Koopman de T

$$\kappa : \mathrm{Aut}(X,\mu) \to U(L^2_{\mathbb{C}}(\mu))$$
$$T \mapsto U_T$$

est une rep. unit., un plongement d'image fermée
donc $Aut(X,\mu)$ hérite de la topo. polonaise de $U(L^2_{\mathbb{C}}(\mu))$

<u>Def</u>: Soit G un groupe polonais
Une action p.m.p. $\alpha : G \curvearrowright (X,\mu)$
est un homomorphisme continu $\alpha : G \longrightarrow Aut(X,\mu)$
et $\kappa_\alpha := \kappa \circ \alpha : G \to U(L^2_{\mathbb{C}}(\mu))$
$$g \mapsto U_{\alpha(g)}$$
est la représentation de Koopman de α.

<u>Remarque</u>: $\kappa_\alpha^{\mathbb{R}} : G \to O(L^2_{\mathbb{R}}(\mu))$ est la représentation de Koopman réelle
$$g \mapsto U_{\alpha(g)}$$
et on a $\left(\kappa_\alpha^{\mathbb{R}}\right)_{\mathbb{C}} = \kappa_\alpha$

<u>Vecteurs Gaussiens</u>:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité standard
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire
X suit une loi normale (Gaussienne) centrée $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$
de variance σ^2 si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$
(fonction caractéristique)

<u>Remarque</u>: $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \to tX \sim \mathcal{N}(0,t^2\sigma^2)$

Un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ est Gaussien si :
$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ est Gaussienne

<u>Exemple</u>: Si $X_1, \dots, X_n$ sont des Gaussiennes indépendantes,
alors $(X_1, \dots, X_n)$ est Gaussien :

$$\mathbb{E}\left(e^{it\sum_{k=1}^{n} a_k X_k}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{ita_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{ita_k X_k}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} e^{-\sigma_k^2 (ta_k)^2}$$
$$= e^{-t^2 \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 a_k^2}$$

Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

$Y := (X_1, \dots, X_n)$

$\to \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, Y\rangle}\right)$ où $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k X_k$

Y est Gaussien ssi $\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, Y\rangle}\right) = e^{-\frac{1}{2} {}^t u \Gamma u}$

où Γ est la matrice de covariance de Y

$$\Gamma = \left(\mathbb{E}(X_i X_j)\right)_{1 \leq i, j \leq n} = \mathbb{E}(Y\,{}^tY)$$

en effet $\operatorname{Var}\langle u, Y\rangle = \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k X_k\right)$

$$= \mathbb{E}({}^tu Y \cdot {}^tu Y) = \mathbb{E}(({}^tu Y)({}^tY u))$$
$$= \mathbb{E}({}^tu\,(Y\,{}^tY)\,u)$$
$$= {}^tu\,\mathbb{E}(Y\,{}^tY)\,u$$
$$= {}^tu\,\Gamma\,u$$

Si A est une matrice $n \times n$, la matrice de covariance de AY est $A\Gamma\,{}^tA$

Remarquons que la loi d'un vecteur Gaussien Y est entièrement déterminée par Γ

<u>Théorème</u>: $Y = (X_1, \dots, X_n)$ est i.i.d avec $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\iff \Gamma = I_n$$

Vecteur Gaussien complexe :

$Z_1, \dots, Z_n : \Omega \to \mathbb{C}$

$(Z_1, \dots, Z_n)$ est Gaussien complexe si $(\mathrm{Re}\, Z_1, \dots, \mathrm{Re}\, Z_n, \mathrm{Im}\, Z_1, \dots, \mathrm{Im}\, Z_n)$ est Gaussien réel.

Espace Gaussien : $H \subset L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})$ est Gaussien si $\forall h \in H$, h est Gaussienne

$\iff \forall (h_1, \dots, h_n) \in H^n$, $(h_1, \dots, h_n)$ est un vecteur Gaussien

Remarque : Si $H \subset L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})$ est Gaussien, alors $\overline{H}$ aussi

en effet si $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. converge en loi

avec $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$, alors la loi limite est $\mathcal{N}(0, \lim \sigma_n^2)$

$\mathbb{E}(e^{it\xi_n}) = e^{-\frac{t^2\sigma_n^2}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(t)$ si $\begin{cases} \sigma_n^2 \text{ cv} \\ \text{ou} \\ \sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ impossible} \end{cases}$

car à la limite $\varphi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\to \varphi$ n'est pas continue en 0

On conclut car la convergence dans L^2 entraîne la convergence en loi.

Déf : $H \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{P})$ est un espace Gaussien complexe si $\forall h \in H$ h est Gaussienne complexe.

$H + \overline{H}$ est encore Gaussien si H est Gaussien

Le modèle i.i.d : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \eta^{\otimes \mathbb{N}})$

où $\eta = \mathcal{N}(0,1)$

On définit $X_k : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto x_k$

$H := \overline{\mathrm{Vect}(X_k, k \in \mathbb{N})}$ est Gaussien

Soit $g \in O(H)$, on considère les $\widetilde{g^{-1}(X_k)} \in H$, $k \in \mathbb{N}$

et on choisit des représentants i.e. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni \omega \mapsto g^{-1}(X_k)(\omega)$

On définit alors
$$T_g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$\omega \mapsto \left(\widetilde{g^{-1}(X_k)}(\omega) \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

g^{-1} envoie une base orthonormée de H sur une base ortho. de H

donc les $g^{-1}(X_k)$, $k \in \mathbb{N}$ sont i.i.d $\sim \mathcal{N}(0,1)$

autrement dit $T_g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\otimes \mathbb{N}})$

Par ailleurs $X_k \circ T_g(\omega) = \widetilde{g^{-1}(X_k)}(\omega)$

c'est à dire $U_{T_g^{-1}}(X_k) = g^{-1}(X_k)$

- T_g est un <u>automorphisme Gaussien</u>
- Si $\pi : G \to O(H)$ est une représentation orthogonale

alors
$$T_\pi : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\otimes \mathbb{N}})$$
$$g \mapsto T_{\pi(g)}$$
est l'action Gaussienne associée à π

<u>Remarque</u>: Si $S \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\otimes \mathbb{N}})$ tq U_S préserve H, alors S est l'automorphisme Gaussien correspondant à $(U_S)_{|H}$, en effet, S est entièrement déterminée par les valeurs $X_k \circ S^{-1}(\omega)$

or $X_k \circ S^{-1}(\omega) = U_S(X_k)(\omega)$ p.p.

<u>Remarque</u>: Si
$$\pi_1 : G \to O(H)$$
$$\pi_2 : G \to O(H)$$
sont équivalentes via $\varphi : H \to H$

alors T_{π_1} est isomorphes à T_{π_2} via l'automorphisme Gaussien T_φ

Propriété de FOIAŞ et STRĂTILĂ

(Action de $\mathbb{Z}$)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique $\left(\begin{array}{l} T : \mathbb{Z} \curvearrowright (X,\mu) \\ \quad n \mapsto T^{-n} \end{array} \right)$

Théorème : (Bochner–Herglotz)

$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$, $\exists\, \sigma_f$, mesure finie sur $\mathbb{S}^1$ tq :

$$\langle U_T^n f, f \rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mu)} = \int_{\mathbb{S}^1} z^n \, \sigma_f(dz) = \check{\sigma}_f(n)$$

σ_f est la mesure spectrale de f.

Théorème : (F. S, '68-69) Il existe $\left\{ \begin{array}{l} \text{une mesure } \sigma \text{ sur } \mathbb{S}^1 \\ \text{des} \end{array} \right.$

telle que : – si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est ergodique

– si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ est telle que $\sigma_f = \sigma$

alors le processus stationnaire $\{ f \circ T^n \}_{n \in \mathbb{Z}}$ est Gaussien (complexe)

i.e. $\overline{\text{Vect}}(f \circ T^n, n \in \mathbb{Z})$ est Gaussien
$\subset L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$

Def : Une telle mesure σ est appelée mesure de F.S (Lemańczyk – Parreau – Thouvenot ...)

Interprétation du résultat :

Def : Soit γ une mesure sur $\mathbb{S}^1$ et $V_\gamma : L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1, \gamma) \to L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1, \gamma)$
$f \mapsto (z \mapsto z f(z))$

V_γ est un opérateur unitaire.

On a une rep. unit. $\rho_\gamma : n \mapsto V_\gamma^n \in U\left(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1, \gamma)\right)$

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique, $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$

$C(f) := \overline{\text{Vect}} \langle U_T^n f, n \in \mathbb{Z} \rangle \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$

$$\langle U_T^n f, f\rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mu)} = \langle V_{\sigma_f}^n \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1, \sigma_f)}$$

$$C(f) \longleftrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1, \sigma_f)$$

Ainsi $\kappa_T^{C(f)} \sim \rho_{\sigma_f}$ donc $\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ $\rho_{\sigma_f} \subset \kappa_{\pi'}$

Le théorème de F.S. indique qu'il existe σ telle que si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est ergodique et $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ telle que $\sigma_f = \sigma$ alors $C(f)$ est Gaussien.

<u>Def</u>: Soit G un groupe polonais et $\pi : G \to U(H)$ une rep. unit.

On dit que π est F.S. si, pour toute action pmp $\alpha \curvearrowright (X, \mu)$ ergodique telle $\pi \subset \kappa_\alpha$ alors si $H \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ est tel que $\pi \sim \kappa_\alpha^H$ alors H est Gaussien.

<u>Remarque</u>: σ est une mesure F.S $\Leftrightarrow$ ρ_σ est F.S.

<u>Théorème</u>: Soit $G = O(H)$, avec H Hilbert réel séparable $\dim H = +\infty$

et $\pi : O(H) \to O(H)$ la rep. orth. canonique
$g \mapsto g$

alors $\pi_{\mathbb{C}}$ est F.S.

<u>Corollaire</u>: Soit $T_\pi : O(H) \curvearrowright (X, \mu)$ l'action Gaussienne associée à π et $\alpha : O(H) \curvearrowright (Y, \nu)$ telle que $\kappa_{T_\pi} \sim \kappa_\alpha$, alors T_π et α sont isomorphes.

(Détermination spectrale)

Preuve du théorème :

Remarquons que $S_\infty \hookrightarrow O(H)$ $\quad (S_\infty := \mathrm{Sym}(\mathbb{N}))$

→ on fixe une base orthonormée, S_∞ agit en permutant les vecteurs de la base.

Un résultat de Tomás Ibarlucía :

Def : G, un groupe topologique, a la propriété forte de Kazhdan s'il existe un ensemble (dit de Kazhdan) fini $F \subset G$ et $\varepsilon > 0$ tq : Si $\sigma : G \to U(H)$ est une rep. unit. sans vecteur invariant $\neq 0$

alors $\forall h \in H, \|h\| = 1, \exists g \in F$ tq $\|\sigma(g)h - h\| \geq \varepsilon$

Théorème : (Ibarlucía, '21), Bekka, Tsankov ...

$O(H)$ et $S_\infty \hookrightarrow O(H)$ partagent un même ensemble de Kazhdan fini (à 2 éléments $\{g_a, g_b\}$)

Théorème : Soit $\alpha : O(H) \curvearrowright (X, \mu)$ p.m.p. ergodique

Notons $i : S_\infty \hookrightarrow O(H)$. Alors $\alpha \circ i : S_\infty \curvearrowright (X, \mu)$ est ergodique

Preuve : Soit κ_α la rep de Koopman de α pour $O(H)$

Alors $\kappa_{\alpha \circ i} = \kappa_\alpha \circ i$ est la rep de Koopman de $\alpha \circ i$ pour S_∞

Notons $K = L^2_0(\mu) = L^2_c(\mu) \ominus \mathbb{C}$

κ_α^K n'a pas de vecteur invariant par ergodicité.

ainsi $\forall h \in K, \|h\| = 1, \|\kappa_\alpha^K(g_a)h - h\| \geq \varepsilon$

ou $\|\kappa_\alpha^K(g_b)h - h\| \geq \varepsilon$

or, comme $\{g_a, g_b\} \subset S_\infty$

$\forall h \in K$, $\|h\|=1$, $\|\kappa^K_{\alpha\circ i}(g_a)h - h\| \geq \varepsilon$

ou $\|\kappa^K_{\alpha\circ i}(g_b)h - h\| \geq \varepsilon$

et donc $\kappa_\alpha \circ i$ n'a pas de vecteur invariant $\neq 0$

ainsi $\alpha\circ i : S_\infty \curvearrowright (X, \mu)$ est ergodique

Preuve du théorème :

Soit $\alpha : O(H) \curvearrowright (X,\mu)$ ergodique telle que $\pi_{\mathbb{C}} \subset \kappa_\alpha$

Soit $K \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ tel que $\kappa^K_\alpha \sim \pi_{\mathbb{C}}$

Soit $\varphi : K \longrightarrow H$ tel que $\forall g \in O(H)$ $\varphi\circ\kappa_\alpha(g) = \pi_{\mathbb{C}}(g)\circ\varphi$

On fixe $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base ortho. de H et on considère "S_∞" $\subset O(H)$ qui permute cette base.

On la ramène dans K : $Z_i := \varphi^{-1} e_i$, $i \in \mathbb{N}$

Ainsi S_∞ permute les Z_i, $i\in\mathbb{N}$ et agit ergodiquement sur (X, μ) donc les Z_i sont i.i.d d'après le th de de Finetti, Il reste à montrer qu'elles sont Gaussiennes (complexes)

On effectue une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ sur les 2 premières coordonées.

$g(e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$, $g(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$, $g(e_i) = e_i$ $i \geq 2$

Autrement dit :

$\frac{1}{\sqrt{2}} Z_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} Z_1 \sim Z_0$ $\qquad Z_0 \perp\!\!\!\perp Z_1$

En itérant ce processus $Z_0 \sim \dfrac{Z_0^{(1)} + \dots + Z_0^{(2n)}}{\sqrt{2n}}$

D'après le TCL en dimension 2, Z_0 est Gaussienne $Z_0^{(i)}$ sont iid